

Том 31
Донецк, 2017

Основан в 1997г.

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ**

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Б.В. Бондарев, Ю.О. Курилина</i> Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом при внутреннем и внешнем диффузионном зашумлении	3
<i>Б.В. Бондарев, С.А. Майорова</i> Усреднение в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае быстрых случайных осцилляций	13
<i>V.S. Budyka</i> Boundary triplets for $2p \times 2p$ -Dirac operators with point interactions on a discrete set	23
<i>В.В. Волчков, Вит.В. Волчков</i> Отображения со свойством обобщенной трансмутации	36
<i>Ya.I. Granovskyi</i> To the spectral theory of vector-valued Sturm–Liouville operators with summable potentials	50
<i>S.P. Degtyarev</i> A class of weighted Hölder spaces for parabolic models of mathematical physics I. Some auxiliary properties	66
<i>С.П. Дегтярев, О.Н. Швидкий</i> Разрешимость задачи Коши для обобщенного уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа в гельдеровских классах функций	82
<i>Д.А. Зарайский</i> О множествах, на которых решения уравнения свертки допускают произвольное поведение	90
<i>Б.И. Коносевиц, Ю.Б. Коносевиц, Г.В. Мозалевская</i> Глобальная устойчивость многотоковой модели синхронного электромотора при нелинейном моменте нагрузки	97

<i>А.Н. Курганский, А.Ю. Максимова</i> О ко-контр-фрагментах поведения автоматов	109
<i>Д.В. Лиманский</i> Обобщения теоремы Бомана и априорные оценки для систем минимальных дифференциальных операторов	118
<i>А.Д. Манов</i> Некоторые задачи, связанные с положительно определенными кусочно-линейными функциями	134
<i>А.Л. Павлов</i> О ядре оператора умножения на функцию в пространстве обобщенных функций	149
<i>Д.А. Сапронов</i> Существование решений с неограниченной энергией задач Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции	161

УДК 519.21

©2017. Б. В. Бондарев, Ю. О. Курилина

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В СИСТЕМАХ СО СЛАБЫМ СИГНАЛОМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ И ВНЕШНЕМ ДИФФУЗИОННОМ ЗАШУМЛЕНИИ

Наблюдения над «зашумлённым» параметрическим семейством функций происходят с диффузионными погрешностями. Малый параметр при коэффициенте сноса делает эту модель, пригодной для описания систем со слабым сигналом. Построен доверительный интервал для неизвестного параметра с наперёд заданной надёжностью.

Ключевые слова: оценка параметра, метод максимального правдоподобия, плотность мер, интервал накрытия.

1. Введение. Вопросом оценки неизвестных параметров в сносе стохастического дифференциального уравнения посвящено значительное число исследований: достаточно назвать монографии [1–6], статьи [7–9], и ряд других. В работе [9] рассмотрена задача оценки неизвестного параметра в коэффициенте сноса в условиях «слабого сигнала». Данная работа в идейном плане близка к [9].

В данной работе рассматривается следующая задача: наблюдается

$$\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T} = \{\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) : 0 \leq t \leq T\},$$

где $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t)$ – траектория решения стохастического дифференциального уравнения с малым параметром ε при коэффициенте сноса

$$d\xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(t) = \varepsilon A(\theta_0, \eta(t))dt + B(\eta(t))dW_1(t), \quad \xi_{\theta_0}^{\varepsilon}(0) = \xi_0, \quad (1)$$

где $W_1(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\eta(t), t \geq 0$ – стационарное решение однородного стохастического дифференциального уравнения

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \alpha(\eta(s))ds + \int_0^t \beta(\eta(s))dW(s). \quad (2)$$

Здесь $\eta(t), t \geq 0$ не зависит от $W_1(t), t \geq 0$. Процесс $W(t), t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс, также как и $\eta(0)$ не зависит от $W_1(t), t \geq 0$. Относительно коэффициентов уравнения (2) будем предполагать выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} |\alpha(x) - \alpha(y)| + |\beta(x) - \beta(y)| &\leq L|x - y|, \quad 0 < L < +\infty, \\ 0 < \lambda \leq \beta^2(x) &\leq \lambda_+ < +\infty, \quad |\alpha(x)| \leq C, \end{aligned} \quad (3)$$

для всех $x, y \in R_1$. Причём для некоторого $r > 0$ выполнено условие:

$$x\alpha(x) \leq -\gamma|x|, \quad \gamma > 0, \quad (4)$$

при $|x| \geq r$.

Условия (3) и (4) достаточны (см. [10]) для экспоненциально быстрого перемешивания решения $\eta(t)$. В случае выполнения условий (3), (4) у процесса $\eta(t)$ существует [11, §18] эргодическое распределение $\pi(x)$ с плотностью

$$\rho(x) = \frac{1}{D\beta^2(x)} \exp \left\{ \int_0^x \frac{2\alpha(y)dy}{\beta^2(y)} \right\}. \quad (5)$$

В силу теоремы 1 из [12] для каждого достаточно малого $c_3 > 0$ существуют $c_0 > 0, c_4 > 0$ такие, что по любой постоянной $c_1 > 0$ найдутся $c_2 > 0, c_3 > 0$ такие, что

$$\text{var}(P(x, t, dy) - \pi(dy)) \leq c_2 \exp\{c_1|x| - c_3t\}, \quad (6)$$

где $P(x, t, dy)$ – вероятность перехода процесса $\eta(s)$ за промежуток времени t из точки x в интервал от y до $y + dy$.

Как уже было сказано ранее, везде в дальнейшем будем предполагать, что распределение независимой от $W(t), t \geq 0$ случайной величины $\eta(x)$ совпадает с $\pi(x)$, т.е., процесс $\eta(t), t \geq 0$ – стационарный марковский процесс, тогда найдётся такая постоянная $c_1 > 0$, что справедлива оценка [12, с. 1063]

$$M \exp\{c_1|\eta(t)|\} \leq C_1 < +\infty. \quad (7)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – малый параметр, коэффициент сноса $A(\theta_0, x)$ в уравнении (1) естественно интерпретировать как сигнал, θ_0 – неизвестный параметр, т.е. наблюдается «слабый», сигнал, «зашумлённый», как внутренне так и внешне диффузионным шумом. Будем предполагать, что неизвестный параметр $\theta_0 \in Q$, где Q – некоторое заданное параметрическое множество. Ставится следующая задача: оценить неизвестный параметр θ_0 по траектории решения $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T/\varepsilon^2}$ уравнения (1), наблюдаемой на промежутке времени $[0, T/\varepsilon^2]$ и построить для него интервал накрытия:

$$\theta_\varepsilon - \delta_\varepsilon < \theta_0 < \theta_\varepsilon + \delta_\varepsilon,$$

накрывающий неизвестный параметр θ_0 с вероятностью $1 - \gamma_\varepsilon$, причём $\delta_\varepsilon, \gamma_\varepsilon$ ($\delta_\varepsilon \rightarrow 0, \gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) должны быть выписаны в явном виде. Здесь θ_ε – некоторая построенная по $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T}$ оценка неизвестного параметра.

Идея построения θ_ε : оценки неизвестного параметра θ_0 и построения интервала накрытия базируется на том, что при наложенных ниже условиях случайный процесс $\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2), 0 \leq t \leq T$, где $\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t)$ – решение задачи (1), «близок» в смысле метрики

$$\rho(X, Y) = \sup_{0 \leq t \leq T} M|X(t) - Y(t)|$$

к процессу

$$d\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(t) = \bar{A}(\theta_0)dt + \bar{B}d\widetilde{W}_\varepsilon(t), \quad \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(0) = 0, \quad (8)$$

где $\widetilde{W}_\varepsilon(t)$ – семейство стандартных винеровских процессов и коэффициенты $\bar{A}(\theta), \bar{B}$ выражаются через коэффициенты уравнения $A(\theta, x), B(x)$, а именно

$$\overline{A}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\theta, x) \rho(x) dx, \quad \overline{B}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(x) \rho(x) dx. \quad (9)$$

2. Вспомогательные результаты. Оценка скорости сходимости к предельным характеристикам.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (3), (4), (7), (9) и пусть

$$|A(\theta, x)| \leq C < +\infty,$$

тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \right| \leq \varepsilon \left(\frac{8CTC_1c_2}{c_3} \right)^{1/2}. \quad (10)$$

Доказательство. Построим оценку

$$\begin{aligned} & M \left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \right)^2 = \\ & = M \left[\left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \right) \times \left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(s)) - \overline{A}(\theta_0)] ds \right) \right] = \\ & = \varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \overline{A}(\theta_0)] ds = \\ & = \varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_0^s [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \times d \int_0^s [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau + \\ & + \varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \overline{A}(\theta_0)] ds = \\ & = \frac{1}{2} M \left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \right)^2 + \\ & + \varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \overline{A}(\theta_0)] d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \overline{A}(\theta_0)] ds. \end{aligned}$$

Объединяя начало и конец выкладок и приводя подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} & M \left(\varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)] d\tau \right)^2 = \\ & = 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)] d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds. \end{aligned} \quad (11)$$

В правой части (11) возьмём условное математическое ожидание и снова воспользуемся (2)

$$\begin{aligned} & 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} M \int_s^{t/\varepsilon^2} [A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)] d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds = \\ & = M 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M\{[A(\theta_0, \eta(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]/\mathfrak{I}_0^s\} d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds = \\ & = M 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M\{[A(\theta_0, \eta_{\eta(s)}(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)]/\mathfrak{I}_0^s\} d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds \leq \\ & \leq M 2\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} \{M[A(\theta_0, \eta_x(\tau)) - \bar{\alpha}(\theta_0)]/x = \eta(s)\} d\tau \times [A(\theta_0, \eta(s)) - \bar{A}(\theta_0)] ds \leq \\ & \leq 4C\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M\{|MA(\theta_0, \eta_x(\tau)) - \bar{A}(\theta_0)|/x = \eta(s)\} d\tau ds \leq \\ & \leq 4C\varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M\{|MA(\theta_0, \eta_x(\tau)) - \bar{\alpha}(\theta_0)|/x = \eta(s)\} d\tau ds \leq \\ & \leq 8C c_2 \varepsilon^4 \int_0^{t/\varepsilon^2} \int_s^{t/\varepsilon^2} M \exp\{c_1 \eta(s)\} \exp\{-c_3[\tau - s]\} d\tau ds \leq \\ & \leq 8\varepsilon^2 CTC_1 c_2 \int_0^{T/\varepsilon^2} \exp\{-c_3 \alpha\} d\alpha \leq \frac{8\varepsilon^2 CTC_1 c_2}{c_3}. \end{aligned}$$

Здесь использовали соотношения между метрикой L_1 и расстоянием по вариации [13]. Тем самым неравенство (10) из теоремы 1 доказано, а следовательно и сама теорема 1 доказана. $\square$

Теорема 2. Пусть $\{\mu_t, \mathfrak{S}_0^t, t \geq 0\}$ – непрерывный локальный мартингал, такой что $\lim_{t \rightarrow \infty} [\mu, \mu]_t = +\infty$, а $\tau_t = \inf\{s > 0 : [\mu, \mu]_s \geq \beta^2 t\}$ – конечный марковский момент для каждого $t > 0$. Тогда найдётся стандартный винеровский процесс W_t , такой, что выполняется неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M|\varepsilon \mu_{t/\varepsilon^2} - \beta \varepsilon W_{t/\varepsilon^2}|^2 \leq \sup_{0 \leq t \leq T} M|\varepsilon^2 \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} - \beta^2 t|. \quad (12)$$

В настоящем разделе в качестве μ_t^ε будет взят процесс

$$\mu_t^\varepsilon = \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B(\eta(\tau)) dW_1(\tau), \text{ так что } \varepsilon^2 \langle \mu, \mu \rangle_{t/\varepsilon^2} = \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} B^2(\eta(\tau)) d\tau.$$

Лемма 1. Предположим, что

$$B^2(x) \leq C < +\infty, \quad \overline{B}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(x) \rho(x) dx, \quad \overline{B} = \sqrt{\overline{B}^2},$$

тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B((s)) dW_1(s) - \widetilde{B} W_\varepsilon(t) \right|^2 \leq \\ & \leq \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon^2} B^2(\eta(s)) ds - t \overline{B}^2 \right| \leq \varepsilon \left(\frac{8CTC_1c_2}{c_3} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство леммы следует из оценки (10) теоремы 1 и неравенства (12) теоремы 2.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (3), (4), (7), (9) и пусть

$$|A(\theta, x)| \leq C < +\infty, \quad B^2(x) \leq C < +\infty, \quad \overline{B} = \sqrt{\overline{B}^2},$$

$$M|\xi_\theta|^2 \leq C < \infty,$$

$$C_3 = \left(3C + 3 \frac{8CC_1c_2}{c_3} + 3 \left(\frac{8CC_1c_2}{c_3} \right)^{1/2} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

тогда справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} M|\overline{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(t) - \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2)| \leq \sqrt{\varepsilon} C_3 \sqrt{T}. \quad (15)$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq t \leq T} M |\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(t/\varepsilon^2) - \overline{\xi_{\theta_0}^\varepsilon}(t)|^2 &\leq 3M\varepsilon |\xi_0|^2 + 3 \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} A(\theta_0, \eta(s)) ds - t \overline{A}(\theta_0) \right|^2 + \\
 &+ 3 \sup_{0 \leq t \leq T} M \left| \varepsilon^2 \int_0^{t/\varepsilon^2} B(\eta(s)) dW_1(s) - \overline{B} \widetilde{W}_\varepsilon(t) \right|^2 \leq 3\varepsilon C + \\
 &+ 3\varepsilon^2 \frac{8CTC_1c_2}{c_3} + 3\varepsilon \left(\frac{8CTC_1c_2}{c_3} \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq 3\varepsilon \left(C + \frac{8\varepsilon CTC_1c_2}{c_3} + \left(\frac{8CTC_1c_2}{c_3} \right)^{1/2} \right) T = (\sqrt{\varepsilon} \sqrt{T} C_3)^2. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Из (16) следует утверждение теоремы 3. $\square$

3. Главная часть. Пусть $(G_T, \mathfrak{R}_T)$ – измеримое пространство непрерывных функций $\{x_t, 0 \leq t \leq T\}$ на $[0, T]$ с σ – алгеброй $\mathfrak{R}_T$. Обозначим через μ_θ^T вероятностную меру на $(G_T, \mathfrak{R}_T)$, порождённую процессом $\xi_\theta^\varepsilon(t) : 0 \leq t \leq T$, где

$$d\overline{\xi}_\theta^\varepsilon(t) = \overline{A}(\theta)dt + \overline{B}d\widetilde{W}_\varepsilon(t), \quad \overline{\xi}_\theta^\varepsilon(0) = 0.$$

Предположим сначала, что наблюдается траектория решения (8):

$$\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T} = \{\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t) : 0 \leq t \leq T\}$$

на промежутке времени $[0, T]$. Известно (см., например, [1]), что при $\theta \in Q, \theta_0 \in Q$ логарифм отношения правдоподобия имеет вид

$$\Lambda_T(\theta, \theta_0, \overline{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) = \ln \frac{d\mu_\theta^T}{d\mu_{\theta_0}^T}(\overline{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) = \int_0^T \frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} d\widetilde{W}_\varepsilon(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} \right]^2 dt,$$

здесь

$$d\widetilde{W}_\varepsilon(t) = \frac{d\overline{\xi}_\theta^\varepsilon(t) - \overline{A}(\theta_0)dt}{\overline{B}},$$

т.е.

$$\begin{aligned}
 \Lambda_T(\theta, \theta_0, \overline{\xi}_{\theta_0}^{\varepsilon, T}) &= \int_0^T \frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} d\widetilde{W}_\varepsilon(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} \right]^2 dt = \\
 &= \int_0^T \frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} \frac{d\overline{\xi}_\theta^\varepsilon(t) - \overline{A}(\theta_0)dt}{\overline{B}} - \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{\overline{A}(\theta) - \overline{A}(\theta_0)}{\overline{B}} \right]^2 dt =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \bar{\xi}_\theta^\varepsilon(T) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta)}{2\bar{B}^2} T. \quad (17)$$

Будем считать, что наблюдается траектория процесса $\xi_{\theta_0}^\varepsilon(t)$ на промежутке времени $0 \leq t \leq T/\varepsilon^2$, т.е. наблюдается $\xi_{\theta_0}^{\varepsilon, T/\varepsilon^2}(t) : 0 \leq t \leq T/\varepsilon^2$. Подставим в (17) вместо $\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)$ величину $\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)$. Пусть θ_ε^T – оценка, доставляющая максимум функции

$$\wedge(\theta_\varepsilon^T, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)) = \frac{\bar{A}(\theta) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta)}{2\bar{B}^2} T,$$

т.е.

$$\wedge(\theta_\varepsilon^T, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)) = \max_{\theta \in Q} \wedge(\theta, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)).$$

Теорема 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и для $\bar{A}(\theta)$ справедливо неравенство

$$|\bar{A}(\theta_1) - \bar{A}(\theta_2)| \geq \tilde{C} |\theta_1 - \theta_2|^\delta, \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad \tilde{C} > 0, \quad \theta_1 \in Q, \quad \theta_2 \in Q, \quad (18)$$

тогда, если $0 < 2\gamma(\varepsilon) < CR^\delta T^{(1-\delta)/2}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} & P\{\sqrt{T}|\theta_\varepsilon^T - \theta_0| > R\} \leq \\ & \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}C_3}{\gamma(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{[\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)]^2}{8K} \right\}. \end{aligned} \quad (19),$$

где R – произвольная положительная величина, выбор которой будет сделан в дальнейшем.

Доказательство. Пусть $\sqrt{T}(\theta_\varepsilon^T - \theta_0) = u$, т.е. $\theta_\varepsilon^T = \theta_0 + u/\sqrt{T}$, тогда

$$\begin{aligned} & P\left\{\sqrt{T}|\theta_\varepsilon^T - \theta_0| > R\right\} \leq \\ & \leq P\left\{\max_{|u|>R} \wedge\left(\theta_0 + u/\sqrt{T}, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)\right) \geq \wedge\left(\theta_\varepsilon^T, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)\right)\right\} = \\ & = P\left\{\max_{|u|>R} \wedge\left(\theta_0 + u/\sqrt{T}, \theta_0, \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)\right) \geq 0\right\} \leq \\ & \leq P\left\{\sup_{|u|>R} \left| \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \right| \left| \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2) - \bar{\xi}_\theta^\varepsilon(T) \right| + \right. \\ & \left. + \sup_{|u| \geq R} \left(\frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta_0 + u/\sqrt{T})}{2\bar{B}^2} T \right) \geq 0\right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq P \left\{ \sup_{|u|>R} \left| \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \right| \sqrt{T} \gamma(\varepsilon) + \right. \\
&+ \sup_{|u|>R} \left(\frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \bar{\xi}_\theta^\varepsilon(T) + \frac{\bar{A}^2(\theta_0)}{2\bar{B}^2} T - \frac{\bar{A}^2(\theta_0 + u/\sqrt{T})}{2\bar{B}^2} T \right) \geq 0 \Big\} + \\
&+ P \{ |\varepsilon \xi_\theta^\varepsilon(T/\varepsilon^2) - \bar{\xi}_\theta^\varepsilon(T)| > \sqrt{T} \gamma(\varepsilon) \} \leq P \left\{ \sup_{|u|>R} \left(\left| \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \right| \sqrt{T} \gamma(\varepsilon) + \right. \right. \\
&+ \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}} \widetilde{W}^\varepsilon(T) - \frac{[\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)]^2}{2\bar{B}^2} T) \geq 0 \Big\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq \\
&\leq P \left\{ \sup_{|u|>R} \left| \frac{\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)}{\bar{B}^2} \right| \sqrt{T} \sup_{|u|>R} [\gamma(\varepsilon) + \sup_{|u|>R} (\bar{B} |\widetilde{W}^\varepsilon(T)/\sqrt{T}|) - \right. \\
&- \frac{|\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)|}{2} \sqrt{T}] \geq 0 \Big\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq P \{ \sup_{|u|>R} (\gamma(\varepsilon) + \bar{B} |\widetilde{W}^\varepsilon(T)/\sqrt{T}| - \\
&- \frac{|\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)|}{2} \sqrt{T} \geq 0 \} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq \\
&\leq P \left\{ \left(\gamma(\varepsilon) + \bar{\beta} |\xi| - \inf_{|u|>R} \frac{|\bar{A}(\theta_0 + u/\sqrt{T}) - \bar{A}(\theta_0)|}{2} \sqrt{T} \right) \geq 0 \right\} + \\
&+ \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq P \left\{ \gamma(\varepsilon) + \bar{\beta} |\xi| - \tilde{C} \frac{|R/\sqrt{T}|^\delta}{2} \sqrt{T} \geq 0 \right\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq \\
&\leq P \left\{ |\xi| \geq \frac{\tilde{C} |R/\sqrt{T}|^\delta \sqrt{T} - 2\gamma(\varepsilon)}{\sqrt{K}} \right\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)} \leq \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\tilde{C} R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{1}{8} \left[\frac{\tilde{C} R^\delta T^{(1-\delta)/2} - 2\gamma(\varepsilon)}{\sqrt{K}} \right]^2 \right\} + \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\gamma(\varepsilon)},
\end{aligned}$$

здесь $\xi \in N(0, 1)$ – распределённая случайная величина. Теорема 4 доказана. $\square$

Следствие 1. Выбираем в (19)

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad R = R(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad T = T(\varepsilon) \rightarrow +\infty, \quad \frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T}(\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\gamma(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

$$\tilde{C} R^\delta(\varepsilon) T^{(1-\delta)/2}(\varepsilon) - 2\gamma(\varepsilon) \rightarrow \infty,$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для произвольных достаточно малых χ, γ , при достаточно малом $\varepsilon > 0$ сможем добиться, того что

$$\frac{R(\varepsilon)}{\sqrt{T}(\varepsilon)} \leq \gamma,$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}C_3}{\gamma(\varepsilon)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{K}}{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)} \exp \left\{ -\frac{[\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)]^2}{8K} \right\} \leq \chi.$$

Отсюда следует: $P\{|\theta_\varepsilon^T(\varepsilon) - \theta_0| \leq \gamma\} \geq 1 - \chi$, т.е. интеграл накрытия построен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливости ради отметим, что в случае, если $\bar{A}(\theta_0)$ – постоянная, доверительный интервал можно построить значительно проще. Действительно, пусть выполняются условия теоремы 3 и к тому же для $\bar{A}(\theta_0)$ справедливо неравенство (18), тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ будем иметь (19), где C_3 определено в (14), $\tilde{\theta}_\varepsilon^T$ – оценка квазimaxимального правдоподобия, которая находится из условия

$$\tilde{\theta}_\varepsilon^T = \arg \min_{\theta \in Q} \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - A(\theta) \right|.$$

С вероятностью 1 справедливо [15] неравенство

$$|A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - A(\theta_0)| \leq 2 \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right| + 2 \frac{|\xi| |\bar{B}|}{\sqrt{T}},$$

тогда справедливо

$$\begin{aligned} P\{|\tilde{\theta}_\varepsilon^T - \theta_0| > R/\sqrt{T}\} &= P\{\tilde{C}|\tilde{\theta}_\varepsilon^T - \theta_0|^\delta > \tilde{C}R^\delta/T^{\frac{\delta}{2}}\} = \\ &= P\{|A(\tilde{\theta}_\varepsilon^T) - \bar{A}(\theta_0)| > \tilde{C}R^\delta T^{-\frac{\delta}{2}}\} \leq \\ &\leq P\left\{ \left| \frac{\varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2)}{T} - \frac{\bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T)}{T} \right| \sqrt{T} + \bar{B}|\xi| > \frac{1}{2} \tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} \right\} \leq \\ &\leq P\left\{ \left| \varepsilon \xi_{\theta_0}^\varepsilon(T/\varepsilon^2) - \bar{\xi}_{\theta_0}^\varepsilon(T) \right| > \sqrt{T} 2\gamma(\varepsilon) \right\} + P\left\{ |\xi| > \frac{\tilde{C}R^\delta T^{\frac{1-\delta}{2}} - 2\gamma(\varepsilon)}{2\sqrt{K}} \right\}. \end{aligned}$$

Откуда с учётом оценки (15) и элементарного неравенства для модуля гауссовской величины также имеем (19).

4. Выводы. В работе рассмотрена задача оценки неизвестного параметра θ_0 , входящего в коэффициент сноса стохастического дифференциала. Стоящий при коэффициенте сноса малый параметр делает такую модель пригодной для описания слабых сигналов, внутренне и внешне зашумлённых диффузионным эргодическим процессом. Показано, что наблюдаемый процесс «близок» потраекторно к некоторому гауссовскому процессу, который не наблюдается, но для которого возможно применить метод максимального правдоподобия для оценки неизвестного параметра. Вводится понятие оценки квазimaxимального правдоподобия. Наблюдая такой процесс достаточно долгое время, по оценке (19) всё же удаётся построить достаточно «узкий» интервал гарантийного накрытия неизвестного параметра.

1. Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. Линьков Ю.Н. Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. Думка, 1993. – 254 с.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
4. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. – Киев: Вища шк., 1982. – 192 с.
5. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 151 с.
6. Кутоянц Ю.А. Оценивание параметров случайных процессов. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1980. – 253 с.
7. Bhattacharya R.A. Central limit theorem for diffusions with periodic coefficients // Ann. Probab. – 1985. – **13**, № 2. – Р. 385–396.
8. Сафонова О.А. Об асимптотическом поведении интегральных функционалов от диффузионных процессов с периодическими коэффициентами. // Украинский мат. журн. – 1992. – **44**. – С. 245–252.
9. Бондарев Б.В., Козыр С.М. Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 3. – С. 109–117.
10. Веретенников А.Ю. Об оценках скорости перемешивания для стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и её применения. – 1987. – **32**, № 2. – С. 299–308.
11. Гизман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. Думка, 1982. – 612 с.
12. Pardoux E., Veretennikov A.Yu. On the Poisson equation and diffusion approximation // I. Ann. Probab. – 2001. – **29**, № 3. – С. 1061–1085.
13. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. – М.: Мир, 1988. – 408 с.
14. Бондарев Б.В., Ковтун Е.Е. Оценка скорости сходимости в обыкновенных дифференциальных уравнениях, находящихся под воздействием случайных процессов с быстрым временем // Украинский мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 435–457.
15. Бондарев Б.В., Курилина Ю.О., Оценка неизвестного параметра в системах со слабым сигналом при внутреннем и внешнем зашумлении // Вестник ДонНУ. – Сер.А: Естественные науки. – 2017. – № 3. – С. 3–11.

B. V. Bondarev, Y. O. Kurilina

Evaluation of unknown parameter in systems with weak signal at internal and external diffusion slashing.

Observations over «noisy» parametrical family of functions happen to diffusion errors. Small parameter at coefficient of demolition does this model, suitable for the description of systems with a weak signal. The fiducial interval for unknown parameter with beforehand given reliability is constructed.

Keywords: parameter estimation, maximum likelihood method, density of measures, coverage interval.

Донецкий национальный ун-т
netakayainesamaya@gmail.com

Получено 08.09.17

УДК 519.21

©2017. Б. В. Бондарев, С. А. Майорова

УСРЕДНЕНИЕ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ БЫСТРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ

Рассмотрена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, где коэффициентами при производных являются случайные функции, а внешнее воздействие – случайная функция, суммированная с быстро осциллирующим случайным воздействием, которое является «физическим» белым шумом. Получена оценка для нормированных флуктуаций решения исходной стохастической задачи относительно некоторого приближенного решения исходной задачи, имеющего более простой вид.

Ключевые слова: краевая задача, процесс Орнштейна–Уленбека, «физический» белый шум, экспоненциальная оценка.

1. Введение. Усреднению в системах стохастических эллиптических уравнений, а также оценке скорости сходимости в принципе усреднения в эллиптических системах с быстрыми осцилляциями посвящены работы [1–9] и другие. С современными детерминированными постановками аналогов таких задач можно ознакомиться по работам [10–15]. Интерес к таким задачам связан с тем, что во многих областях современной техники широко применяются композитные материалы, имеющие периодическую структуру, а математические модели процессов, протекающих в таких материалах, как правило, описываются уравнениями с быстро осциллирующими случайными коэффициентами. А именно, рассматривается краевая задача для эллиптических систем, где коэффициент при производной – случайная функция, а внешнее воздействие – случайная функция, суммированная с быстро осциллирующим случайным воздействием, которое является «физическим» белым шумом. В работах [1–9] найдены естественные ограничения на коэффициенты операторов, которые обеспечивают приближение решений уравнений в частных производных с быстроосциллирующими по пространственной переменной случайными коэффициентами с решением усредненного уравнения. Естественно встает вопрос о скорости сходимости решений усредненных систем. В работах [8, 9] находится скорость сближения решения исходной задачи с решением задачи усредненной. Задача, похожая на рассматриваемую в данной статье, рассмотрена в [16], однако там коэффициент при производной – неслучайная периодическая функция.

В данной работе решается аналогичная задача об оценке скорости сближения решения исходного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, находящегося под воздействием внешних быстро осциллирующих случайных помех, при случайных внутренних периодических быстрых осцилляциях с некоторым приближенным решением, имеющим более простую структуру.

2. Постановка задачи и ее решение. Рассмотрим на $[0, 1]$ краевую задачу

$$\frac{d}{dx} \left[K \left(\xi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \frac{dU_\varepsilon}{dx} \right] = f(x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad U_\varepsilon(0) = U_\varepsilon(1) = 0, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, случайный процесс $\xi(t)$ – решение стохастического уравнения

$$d\xi(t) = a(\xi(t)) dt + \sigma(\xi(t)) dW(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (2)$$

коэффициенты $a(x)$, $\sigma(x)$ которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) являются периодическими с периодом 1 неслучайными функциями;
- 2) имеют производные первого порядка $a'(x)$, $\sigma'(x)$, удовлетворяющие условию Гельдера;

3) функции $a(x)$, $\sigma(x)$, $a'(x)$, $\sigma'(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned} a(x) &= a(x+1), \quad \sigma(x) = \sigma(x+1), \quad |a(x)| \leq K < +\infty, \\ 0 < \lambda \leq \sigma^2(x) \leq K < +\infty, \quad |a'(x)| + |\sigma'(x)| &\leq K < +\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\rho(x)$ – решение периодической задачи

$$\begin{cases} L^* \rho = \frac{1}{2} \frac{d^2(\rho(x)\sigma^2(x))}{dx^2} - \frac{d(\rho(x)a(x))}{dx} = 0; \\ \rho(x) = \rho(x+1), \end{cases}$$

однозначно определенное условием нормировки

$$\int_0^1 \rho(x) dx = 1.$$

Найдем решение краевой задачи (1). Пусть [14] функция

$$\vartheta(x) = \exp \left\{ - \int_0^x \frac{2a(y)}{\sigma^2(y)} dy \right\}. \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что при $x \in [0, 1]$ для $\vartheta(x)$ справедливы оценки

$$0 < \exp \left\{ - \frac{2K}{\lambda} \right\} = C^{-1} \leq \vartheta(x) \leq C = \exp \left\{ \frac{2K}{\lambda} \right\} < +\infty. \quad (5)$$

Рассмотрим [14] функцию

$$G_0(x) = \frac{2}{(1 + \vartheta(1)) \sigma^2(x) \vartheta(x)} \left[\vartheta(1) \int_0^x \vartheta(y) dy + \int_x^1 \vartheta(y) dy \right]. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что введенная функция $G_0(x)$ – периодическая с периодом 1 функция. Действительно, в силу того, что $\vartheta(x+1) = \vartheta(1)\vartheta(x)$, имеем

$$\begin{aligned} G_0(x+1) &= \frac{2}{(1 + \vartheta(1)) \sigma^2(x) \vartheta(x)} \left[\vartheta(1) \int_0^{x+1} \vartheta(y) dy - \int_1^{x+1} \vartheta(y) dy \right] = \\ &= \frac{2}{(1 + \vartheta(1)) \sigma^2(x) \vartheta(x)} \left[\int_0^1 \vartheta(y) dy + (\vartheta(1) - 1) \int_0^x \vartheta(y) dy \right] = G_0(x). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться также в том, что функция $G_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} (\sigma^2(x)G_0(x))' = G_0(x)a(x) + \frac{1}{1+\vartheta(1)}[\vartheta(1) - 1].$$

Из существования производных $a'(x), \sigma'(x)$ и условия $0 < \lambda \leq \sigma^2(x)$ следует дифференцируемость выражений $(\sigma^2(x)G_0(x))'$ и $G_0(x)a(x)$, таким образом

$$\rho(x) = G_0(x) \left[\int_0^1 G_0(y) dy \right]^{-1} \quad (7)$$

является классическим решением задачи (4), удовлетворяющим (5).

Функции $K(x), f(x)$ – неслучайные периодические с периодом 1 функции такие, что

$$0 < K_0 \leq K(x) \leq K_1 < +\infty, \quad |f(x)| \leq f_0 < +\infty. \quad (8)$$

Стационарный в узком смысле процесс $\eta(t)$, $t > 0$ такой, что $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ является «физическим» белым шумом, то есть допускает представление Д.О. Чикина [17, 18]

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = W_\varepsilon(t) + \rho_\varepsilon(t),$$

где $P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\rho_\varepsilon(t)| > \delta_\varepsilon\} \leq \gamma_\varepsilon$, $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$, $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выписаны в явном виде, а $W_\varepsilon(t)$ – стандартный винеровский процесс. В дальнейшем в качестве $\eta(t)$ будет взят классический процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами γ, σ

$$d\eta(t) = -\gamma\eta(t)dt + \sigma dW(t).$$

Процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ независимы между собой.

3. Усредненная краевая задача. Наряду с краевой задачей (1) рассмотрим на $[0, 1]$ «усредненную» краевую задачу

$$\bar{k} \frac{d^2 U_0}{dx^2} = f(x), \quad U_0(0) = U_0(1) = 0, \quad (9)$$

где

$$\bar{k} = \left(\int_0^1 \frac{\rho(x)}{K(x)} dx \right)^{-1}, \quad (10)$$

$U_\varepsilon(x)$ – классическое решение задачи (1), $U_\varepsilon^1(x)$ – случайный процесс вида

$$U_\varepsilon^1(x) = U_0(x) - \int_0^x \frac{y}{\bar{k}} dW_\varepsilon(y) - \frac{x}{\bar{k}} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + x \int_0^1 \frac{y}{\bar{k}} dW_\varepsilon(y), \quad (11)$$

где $U_0(x)$ – классическое решение задачи (9), которое определяется формулой

$$U_0(x) = -\frac{1-x}{\bar{k}} \int_0^x y f(y) dy - \frac{x}{\bar{k}} \int_x^1 (1-y) f(y) dy. \quad (12)$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $U_\varepsilon^1(x)$ также удовлетворяет краевым условиям $U_\varepsilon^1(0) = U_\varepsilon^1(1) = 0$.

Функция Грина данной задачи имеет вид [19]

$$G_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} -g_\varepsilon(x) + \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)}, & 0 \leq x \leq t; \\ -g_\varepsilon(t) + \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)}, & t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где

$$g_\varepsilon(x) = \varepsilon \int_0^{x/\varepsilon} \frac{dt}{K(\xi(t))}.$$

4. Оценка вероятности уклонения. Результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (3), (5), (8), (10), краевые условия задачи (9), имеют место (11) и (12), тогда справедлива оценка

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^1(x)| \geq 3\sqrt[8]{\varepsilon} \right\} \leq \gamma(\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon) = & \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 \delta_\varepsilon^2}{16\sigma^2 \varepsilon} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[\frac{\sqrt{2}\gamma \delta_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^{-1} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}\gamma \delta_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^2 \right\} + \sqrt[4]{\varepsilon} C_3 + f_0 C_1 \sqrt[8]{\varepsilon^3}, \\ \delta_\varepsilon = & \sqrt[8]{\varepsilon} \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Доказательство. Запишем решение (1) в виде

$$U_\varepsilon(x) = \int_0^1 G_\varepsilon(x, z) f(z) dz + \int_0^1 G_\varepsilon(x, z) dW_\varepsilon(z) + \int_0^1 G_\varepsilon(x, z) d\rho_\varepsilon(z). \quad (13)$$

Для дальнейших расчетов нам понадобится следующая теорема из [21, с. 18].

Теорема 2. Пусть диффузионный процесс задан как решение уравнения (2), выполнены условия (3), тогда для любой 1-периодической, дважды непрерывно дифференцируемой функции $\mu(x)$ ($|\mu(x)| \leq \frac{1}{K_0} < +\infty$) и любого $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [\mu(\xi_x(s)) - \bar{\mu}] ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\xi_x(s)) \psi(\xi_x(s)) dW(s) \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{\gamma K_0},$$

здесь постоянные $c > 0, \gamma > 0$ из оценки

$$\sup_x |M\mu(\xi_x(t)) - \bar{\mu}| \leq c \sup_x |\mu(x)| \exp\{-\gamma t\},$$

функция $\psi(x)$ задается формулой

$$\psi(x) = -\vartheta^{-1}(x) \left[\int_x^1 \vartheta(y) \frac{2[\mu(y) - \bar{\mu}]}{\beta^2(y)} dy \right],$$

а $\rho(x)$ задается формулой (7), в которой $G_0(x)$ задано в (6).

Далее

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [\mu(\xi_x(s)) - \bar{\mu}] ds \right| &\leq \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \left(M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} \sigma(\xi_x(s)) \psi(\xi_x(s)) dW(s) \right|^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{\gamma K_0} \leq \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \left(4M \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{T/\varepsilon} \sigma(\xi_x(s)) \psi(\xi_x(s)) dW(s) \right|^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{\gamma K_0} \leq 2\sqrt{\varepsilon} \times \\ &\times \left(\varepsilon \int_0^{T/\varepsilon} \frac{16C^4 K^2}{\lambda^2 K_0^2} ds \right)^{1/2} + \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{\gamma K_0} \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{2c}{\gamma K_0} + \frac{8KC^2\sqrt{\varepsilon T}}{\lambda K_0} = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{K_0} \left(\frac{4KC^2\sqrt{T}}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right); \\ |\psi(x)| &\leq \frac{4C^2}{\lambda K_0}, |\sigma(x)| \leq K. \end{aligned}$$

То есть

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t/\varepsilon} [\mu(\xi_x(s)) - \bar{\mu}] ds \right| \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{K_0} \left(\frac{4KC^2\sqrt{T}}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right).$$

Подставляем наши значения, получаем:

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x \left[\frac{1}{K(\xi_x(s/\varepsilon))} - \int_0^1 \frac{\rho(y)}{K(y)} dy \right] ds \right| \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{K_0} \left(\frac{4KC^2\sqrt{T}}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right). \quad (14)$$

Далее рассмотрим каждый интеграл в выражении (13). Начнем с последнего.

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) &= \int_0^x \left[-g_\varepsilon(x) + \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} \right] d\rho_\varepsilon(t) + \\ &+ \int_x^1 \left[-g_\varepsilon(t) + \frac{g_\varepsilon(t)g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \right] d\rho_\varepsilon(t) = -g_\varepsilon(x) \int_0^x d\rho_\varepsilon(t) - \\ &- \int_x^1 g_\varepsilon(t) d\rho_\varepsilon(t) + \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(t) d\rho_\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы по $\rho_\varepsilon(t)$. Справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq x \leq 1} | -g_\varepsilon(x)\rho_\varepsilon(x) | &= \frac{1}{K_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)|. \\
 \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x)\rho_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(1)\rho_\varepsilon(1) + \int_x^1 \rho_\varepsilon(t)dg_\varepsilon(t) \right| &\leq \frac{1}{K_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \\
 &\quad \frac{1}{K_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_x^1 \left| \rho_\varepsilon(t) \frac{dt}{K\left(\xi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)} \right| \leq \frac{3}{K_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)|. \\
 \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{(g_\varepsilon(x))^2}{g_\varepsilon(1)} \rho_\varepsilon(x) - \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^x \rho_\varepsilon(t)dg_\varepsilon(t) \right| &\leq \frac{K_1}{K_0^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \\
 &\quad + \frac{K_1}{K_0^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| = \frac{2K_1}{K_0^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)|. \\
 \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| -\frac{(g_\varepsilon(x))^2}{g_\varepsilon(1)} \rho_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x)\rho_\varepsilon(1) - \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_x^1 \rho_\varepsilon(t)dg_\varepsilon(t) \right| &\leq \frac{2K_1}{K_0^2} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| + \\
 &\quad + \frac{1}{K_0} \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| = \left(\frac{2K_1}{K_0^2} + \frac{1}{K_0} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)|.
 \end{aligned}$$

То есть

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, t) d\rho_\varepsilon(t) \right| \leq \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right) \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)|.$$

В силу оценки (14) имеем

$$\begin{aligned}
 M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right| &= M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^x \left[\frac{1}{K(\xi_x(y/\varepsilon))} - \int_0^1 \frac{\rho(s)}{K(s)} ds \right] dy \right| \leq \\
 &\leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right); \\
 \sup_{0 \leq x \leq 1} |g_\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{K_0}, \quad \int_0^1 \frac{\rho(s)}{K(s)} ds = \frac{1}{k} \leq \frac{1}{K_0}.
 \end{aligned}$$

Откуда следует оценка

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right|^2 \leq M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right| \left[\sup_{0 \leq x \leq 1} |g_\varepsilon(x)| + \frac{1}{k} \right] \leq \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right).$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
 M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} - x \right| &= M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(1)x}{g_\varepsilon(1)} \right| \leq K_1 M \sup_{0 \leq x \leq 1} |g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(1)x| \leq \\
 &\leq K_1 M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left[\left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right| + \left| g_\varepsilon(1) - \frac{1}{k} \right| x \right] \leq 4\sqrt{\varepsilon} \frac{K_1}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right).
 \end{aligned}$$

Из вышеизложенного следует оценка

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} - x \right|^2 \leq \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} - \frac{xt}{\bar{k}} \right| = M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\bar{k}g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(1)xt}{\bar{k}g_\varepsilon(1)} \right| \leq \\ & \leq \frac{K_1}{K_0} M \sup_{0 \leq x, t \leq 1} |\bar{k}g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(1)xt| \leq \frac{K_1}{K_0} \left| \left[g_\varepsilon(x) - \frac{x}{\bar{k}} \right] \left[g_\varepsilon(t) - \frac{t}{\bar{k}} \right] \bar{k} \right| + \\ & + \frac{K_1}{K_0} \left| \left[g_\varepsilon(x) - \frac{x}{\bar{k}} \right] t + \left[g_\varepsilon(t) - \frac{t}{\bar{k}} \right] x + \frac{xt}{\bar{k}} - \left[g_\varepsilon(1) - \frac{1}{\bar{k}} \right] xt - \frac{xt}{\bar{k}} \right| \leq \\ & \leq \frac{K_1}{K_0} \left[\frac{4K_1\sqrt{\varepsilon}}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right)^2 + \frac{6\sqrt{\varepsilon}}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right) \right] = C_1\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Получаем

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(1)} - \frac{xt}{\bar{k}} \right| \leq C_1\sqrt{\varepsilon}, \quad (15)$$

$$C_1 = \frac{K_1}{K_0} \left[\frac{4K_1}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right)^2 + \frac{6}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right) \right]. \quad (16)$$

Пусть

$$G_0(x, t) = \begin{cases} -\frac{x}{\bar{k}} + \frac{xt}{\bar{k}}, & 0 \leq x \leq t; \\ -\frac{t}{\bar{k}} + \frac{xt}{\bar{k}}, & t \leq x \leq 1, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} & M \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_0^x |G_\varepsilon(x, t) - G_0(x, t)| dt + M \sup_{0 \leq x \leq 1} \int_x^1 |G_\varepsilon(x, t) - G_0(x, t)| dt \leq \\ & \leq 2M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| g_\varepsilon(x) - \frac{x}{\bar{k}} \right| + M \sup_{0 \leq x, t \leq 1} \left| \frac{\bar{k}g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(1)xt}{\bar{k}g_\varepsilon(1)} \right| \leq \sqrt{\varepsilon}C_2, \\ & C_2 = \frac{K_1}{K_0} \left[\frac{4K_1}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right)^2 + \frac{6}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right) \right] + \frac{4}{K_0} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, z)f(z)dz - \int_0^1 G_0(x, z)f(z)dz \right| \leq f_0C_1\sqrt{\varepsilon}. \quad (17)$$

Рассмотрим второй интеграл в выражении (13)

$$\int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y) = - \int_0^x g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y) - g_\varepsilon(x) \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + \frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} \int_0^1 g_\varepsilon(y) dW_\varepsilon(y).$$

Откуда [20] имеем

$$\begin{aligned} M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y) - \left[- \int_0^x \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) - \frac{x}{k} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) + x \int_0^1 \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) \right] \right|^2 &\leq \\ &\leq 4M \sup_{0 \leq x \leq 1} \left[2 \int_0^1 \left[g_\varepsilon(y) - \frac{y}{k} \right]^2 dy + 2 \left[g_\varepsilon(x) - \frac{x}{k} \right]^2 + \frac{1}{K_0^2} \left[\frac{g_\varepsilon(x)}{g_\varepsilon(1)} - x \right]^2 \right] \leq \\ &\leq \frac{16\sqrt{\varepsilon}}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right) \left(4 + \frac{1}{K_0^2} \right) = \sqrt{\varepsilon} C_3, \\ C_3 &= \frac{16}{K_0^2} \left(\frac{4KC^2}{\lambda} + \frac{c}{\gamma} \right) \left(4 + \frac{1}{K_0^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая выражения (15)–(18), запишем и оценим вероятность

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^1(x)| \geq 3\beta(\varepsilon) \right\} &\leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, y) dW_\varepsilon(y) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^x \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) + \frac{x}{k} \int_x^1 dW_\varepsilon(y) - x \int_0^1 \frac{y}{k} dW_\varepsilon(y) \right| \geq \beta(\varepsilon) \right\} + \\ &+ P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \int_0^1 G_\varepsilon(x, z) f(z) dz - \int_0^1 G_0(x, z) f(z) dz \right| \geq \beta(\varepsilon) \right\} + \\ &+ P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| \geq \beta(\varepsilon) \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right)^{-1} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{\varepsilon} C_3}{\beta^2(\varepsilon)} + \frac{f_0 C_1 \sqrt{\varepsilon}}{\beta(\varepsilon)} + P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| \geq \beta(\varepsilon) \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned}$$

Нам известно [22], что

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |\rho_\varepsilon(x)| > \delta_\varepsilon \right\} &= P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} \left| \sqrt{\varepsilon} \frac{\eta(0) - \eta(x/\varepsilon)}{\gamma} \right| > \delta_\varepsilon \right\} \leq \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ - \frac{\delta_\varepsilon^2 \gamma^2}{16\varepsilon \sigma^2} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[\frac{\sqrt{2}\gamma\gamma\delta_\varepsilon}{4\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right]^{-1} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2}\gamma\gamma\delta_\varepsilon}{4\sigma\sqrt{\varepsilon}} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Примем

$$\delta_\varepsilon = \beta(\varepsilon) \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right)^{-1},$$

тогда из выше стоящей оценки следует

$$P \left\{ \sup_{0 \leq x \leq 1} |U_\varepsilon(x) - U_\varepsilon^1(x)| \geq 3\beta(\varepsilon) \right\} \leq \gamma(\varepsilon),$$

где

$$\gamma(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon} \exp \left\{ -\frac{\gamma^2 \delta_\varepsilon^2}{16\sigma^2 \varepsilon} [e^{2\gamma} - 1]^{-1} \right\} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \left[\frac{\sqrt{2\gamma} \delta_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^{-1} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{2\gamma} \delta_\varepsilon \gamma}{4\sigma \sqrt{\varepsilon}} \right]^2 \right\} + \sqrt[4]{\varepsilon} C_3 + f_0 C_1 \sqrt[8]{\varepsilon^3},$$

$$\delta_\varepsilon = \sqrt[8]{\varepsilon} \left(\frac{5}{K_0} + \frac{4K_1}{K_0^2} \right)^{-1}.$$

Выберем $\beta(\varepsilon) = \sqrt[8]{\varepsilon}$, тогда $\gamma_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то есть получаем утверждение теоремы 1. $\square$

5. Выводы. Для вероятности уклонения нормированных флуктуаций решения исходной стохастической краевой задачи относительно решения соответствующей детерминированной усредненной задачи установлена оценка экспоненциального типа, что позволяет говорить о достаточно высокой скорости сходимости при усреднении.

1. Козлов С.М. Осреднение случайных структур // Докл. АН СССР. – 1978. – **241**, № 5. – С. 1016–1019.
2. Юринский В.В. О погрешности усреднения многомерной диффузии // Теория вероятностей и ее применения. – 1988. – **33**, вып. 1. – С. 14–24.
3. Жауров Ю.В. Асимптотика флуктуаций в схеме усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами // Теория случайн. процессов. – 1983. – Вып. 11. – С. 31–38.
4. Пожсидаев А.В. Скорость сходимости в принципе усреднения для эллиптических уравнений со случайными коэффициентами // Теория случайн. процессов. – 1984. – Вып. 12. – С. 59–63.
5. Пожсидаев А.В., Бринский В.В. О погрешности усреднения симметричных эллиптических систем // Изв. АН СССР. Сер. математики. – 1989. – **53**, № 4. – С. 851–867.
6. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Усреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
7. Бондарев В.В. Об усреднении в периодических средах при слабо зависимых случайных взаимодействиях. I // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1991. – № 45. – С. 12–20.
8. Бондарев В.В. Про усреднення в періодичних середовищах при слабо залежних випадкових впливах. I // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1992. – Вип. 46. – С. 18–24.
9. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis of periodic structures. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1978. – 700 p.
10. Борисов Д.И. Асимптотика решений эллиптических систем с быстроосциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. – 2008. – **20**, № 2. – С. 19–42.
11. Малахова И.С. Краевая задача для эллиптического уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами в трехмерном случае // Изд-во: Челябинский государственный университет. – 2011. – № 27. – С. 85–93.
12. Назаров С.А., Слуцкий А.С. Осреднение смешанной краевой задачи в области с анизотропной фрактальной перфорацией // Известия РАН, сер. матем. – 2010. – **74**, № 2. – С. 165–194.

13. *Leugering G.R., Nazarov S.A., Slutskij A.S.* Asymptotic analysis of 3D thin anisotropic plates with a piezoelectric patch // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2012. – **35**, № 6. – Р. 633–658.
14. *Мешкова Ю.М.* Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами // *Алгебра и анализ*. – 2013. – **25**, № 6. – С. 125–177.
15. *Мешкова Ю.М., Суслина Т.А.* Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем // *Функц. анализ и его прил.* – 2015. – **49**, № 1. – С. 88–93.
16. *Бондарев Б.В., Майорова С.А.* Усреднение в краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, находящегося под воздействием быстрых случайных осцилляций // *Вестник ДонНУ. Серия А. Естественные науки*. – 2017. – № 3. – С. 12–21.
17. *Жакод Ж., Ширяев А.Н.* Предельные теоремы для случайных процессов: Том 2. пер. с англ. – М.: Физматлит, 1994. – 368 с.
18. *Чикин Д.О.* Функциональная предельная теорема для стационарных процессов: мартингалльный подход // *Теория вероятностей и ее применения*. – 1989. – **14**, № 4. – С. 731–741.
19. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковец Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.
20. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1982. – 612 с.
21. *Бондарев Б.В., Козырь С.М.* Оценка скорости сходимости в обратной задаче Коши с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами // *Труды ИПММ НАН Украины*. – 2008. – **17**. – С. 15–24.
22. *Баев А.В., Бондарев Б.В.* Принцип инвариантности для одного класса стационарных марковских процессов. Оценка скорости сближения // *Вісник Донецького університету, сер А: Природничі науки*. – 2002. – Вип. 2. – С. 7–17.

B. V. Bondarev, S. A. Maiorova

Averaging in the boundary-value problem for an ordinary second-order differential equation in the case of fast oscillations.

The paper includes analysis of the boundary value problem for an ordinary second-order differential equation where derivatives' coefficients are random functions, and external impact is a random function summed with a rapidly oscillating random impact which is «physical» white noise. Assessment for normalized fluctuations of the initial stochastic problem solution was derived relatively to some approximate solution of the initial problem which is of more simplex form.

Keywords: boundary-value problem, Ornstein–Uhlenbeck process, «physical» white noise, exponential estimate.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
svetlana_mayorova@mail.ua

Получено 12.09.17

UDK 517.984.4

©2017. V. S. Budyika

BOUNDARY TRIPLETS FOR $2p \times 2p$ -DIRAC OPERATORS WITH POINT INTERACTIONS ON A DISCRETE SET

The paper is devoted to the boundary triplets, γ -field and corresponding Weyl functions for $2p \times 2p$ -Dirac operators with point interactions on a discrete set.

Keywords: $2p \times 2p$ -Dirac operator, boundary triplets, γ -field, Weyl function.

1. Introduction. It is well known that many exactly solvable models describing complicated physical phenomena are expressed in terms of operators with point interactions (see [3, 4, 13] and comprehensive lists of references therein).

In this paper we investigate boundary triplets of the two families of operators with point interactions associated with the Dirac differential expression

$$D \equiv D^c := -ic \frac{d}{dx} \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & I_p \\ I_p & \mathbb{O}_p \end{pmatrix} + \frac{c^2}{2} \otimes \begin{pmatrix} I_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & -I_p \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c^2/2 & -ic \frac{d}{dx} \\ -ic \frac{d}{dx} & -c^2/2 \end{pmatrix} \otimes I_p. \quad (1)$$

Here $c > 0$ denotes the velocity of light. The relativistic operators with point interactions have received a lot of attention in recent years (see e.g. [2, 3, 5, 6, 8, 9, 19, 21, 14] and references therein).

Following [14] (see also [3]) and assuming that $\mathcal{I} = (a, b)$ with $-\infty < a < b \leq +\infty$ and $I = \mathbb{N}$, we define the operators $D_{X,\alpha}$ and $D_{X,\beta}$ (realizations of D) to be the closures of the operators $D_{X,\alpha}^0 = D$ and $D_{X,\beta}^0 = D$, where

$$\begin{aligned} \text{dom}(D_{X,\alpha}^0) = & \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : \widehat{f}_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}), \widehat{f}_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X); \right. \\ & \left. \widehat{f}_{II}(a+) = 0, \quad \widehat{f}_{II}(x_n+) - \widehat{f}_{II}(x_n-) = -\frac{i\alpha_n}{c} \widehat{f}_I(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\begin{aligned} \text{dom}(D_{X,\beta}^0) = & \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : \widehat{f}_I \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X), \widehat{f}_{II} \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I}); \right. \\ & \left. \widehat{f}_{II}(a+) = 0, \quad \widehat{f}_I(x_n+) - \widehat{f}_I(x_n-) = i\beta_n c \widehat{f}_{II}(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

respectively, i.e. $D_{X,\alpha} = \overline{D_{X,\alpha}^0}$ and $D_{X,\beta} = \overline{D_{X,\beta}^0}$ and

$$\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty, \quad \alpha_n = \alpha_n^* \subset \mathbb{C}^{p \times p}, \quad \beta := \{\beta_n\}_1^\infty, \quad \beta_n = \beta_n^* \subset \mathbb{C}^{p \times p}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

The notation $\widehat{f}$ denotes a vector-function, i.e.

$$\widehat{f}_I = \{ f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n \}^\top, \quad \widehat{f}_{II} = \{ f_{n+1} \quad f_{n+2} \quad \dots \quad f_{2n} \}^\top,$$

where a sign $\top$ means a transpose operation.

The realizations $D_{X,\alpha}$ and $D_{X,\beta}$ have originally been introduced by Gesztesy and Šeba [14] (see also [3, Appendix J]) in the case of $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ and $I = \mathbb{Z}$, i.e. $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. They investigated the point spectrum of these realizations by reducing the problem to a system of finite difference equations.

Namely, they treat the operators $D_{X,\alpha}$ and $D_{X,\beta}$ as extensions of the minimal operator

$$D_X := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} D_n \quad D_n = D, \quad \text{dom}(D_n) = W_0^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^2. \quad (5)$$

Clearly, D_n is symmetric operator with deficiency indices $n_{\pm}(D_n) = 2$. These authors also computed the resolvent differences $(D_{X,\alpha} - z)^{-1} - (D_{\text{free}} - z)^{-1}$ and $(D_{X,\beta} - z)^{-1} - (D_{\text{free}} - z)^{-1}$ where D_{free} is the free Dirac operator D . In the periodic case ($X = \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \alpha_0$, $\beta_k = \beta_0$, $k \in \mathbb{Z}$) they proved that the spectra $\sigma(D_{X,\alpha})$ and $\sigma(D_{X,\beta})$ have band-zone structure.

In order to investigate the spectral properties of the operators, it is necessary to find the boundary triplet and the corresponding Weyl functions. In this paper, we find these objects for the $2p \times 2p$ -Dirac operator with point interactions on a discrete set. The boundary triplet approach to extension theory of symmetric operators has appeared and was intensively elaborated during the last three decades (see [15, 11, 12] and references therein, see also recent monograph [20]).

The main ingredient of this approach is an abstract version of the Green formula for the adjoint A^* of a symmetric operator A that reads as follows

$$(A^*f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^*g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*). \quad (6)$$

Here $\mathcal{H}$ is an auxiliary Hilbert space and the mapping $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is required to be surjective.

It is easily seen that in the case $d_*(X) > 0$ a boundary triplet Π_D for D_X^* can be defined as a direct sum of triplets Π_n for Dirac operators D_n^* defined on $L^2[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}$, i.e. $\Pi_D := \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\} := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Pi_n$, where

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n, \quad \Gamma_0 := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_0^{(n)}, \quad \Gamma_1 := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_1^{(n)}. \quad (7)$$

However, a direct sum of boundary triplets is no longer a boundary triplet for D_X^* whenever $d_*(X) = 0$. To construct a boundary triplet we apply regularization procedure elaborated in [18], [16], [9]. It was already applied to Schrödinger operators with point interactions in [16, 17]. However, in comparison with the Schrödinger case, one meets an additional difficulty of algebraic character: to construct an appropriate boundary triplet for the Dirac operator on a finite interval. Let us emphasize that only a choice of boundary triplets $\tilde{\Pi}^{(n)} = \{\mathbb{C}^{2p}, \tilde{\Gamma}_0^{(n)}, \tilde{\Gamma}_1^{(n)}\}$ for D_n^* , $n \in \mathbb{N}$, in the form (19) (see below) leads after regularization to a new sequence of triplets Π_n for D_n^* , having the desirable properties. Namely, only *in the triplet* $\Pi_D = \bigoplus_1^{\infty} \Pi_n$ *for* D_X^* *the parametrization of*

GS-realizations is given by means of Jacobi matrices. Boundary triplet $\widetilde{\Pi}^{(n)}$ for D_n^* of the form (19) differs from other ones known in the literature (see e.g. [7]).

Notations. Throughout the paper $\mathfrak{H}, \mathcal{H}$ denote separable Hilbert spaces. $[\mathfrak{H}, \mathcal{H}]$ denotes the set of bounded operators from $\mathfrak{H}$ to $\mathcal{H}$; $[\mathfrak{H}] := [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$. $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ and $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathfrak{H})$ are the sets of closed operators and linear relations in $\mathfrak{H}$, respectively. Let T be a linear operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$. In what follows, $\text{dom}(T)$, $\ker(T)$, $\text{ran}(T)$ are the domain, the kernel, the range of T , respectively; $\sigma(T)$ denote the spectrum of $T = T^*$.

Let X be a discrete subset of $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. We define the following Sobolev spaces

$$\begin{aligned} W^{1,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} &:= \{f \in L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p} : f \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X), f' \in L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p}\}, \\ W^{2,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} &:= \{f \in L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p} : f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathcal{I} \setminus X), f'' \in L^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p}\}, \\ W_{\text{comp}}^{k,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} &:= \{f \in W^{k,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : \text{supp } f \text{ is compact in } \mathcal{I}\} = \\ &= W^{k,2}(\mathcal{I} \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} \cap L_{\text{comp}}^2(\mathcal{I}) \otimes \mathbb{C}^{2p}. \end{aligned}$$

Let I be a subset of $\mathbb{Z}$, $I \subseteq \mathbb{Z}$. We denote by $l^2(I, \mathcal{H}) := l^2(I) \otimes \mathcal{H}$ the Hilbert space of $\mathcal{H}$ -valued sequences, i.e. $f = \{f_n\}_{n \in I} \in l^2(I, \mathcal{H})$ if $\|f\|^2 = \sum_{n \in I} \|f_n\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$; $l_0^2(I, \mathcal{H})$ is a subset of finite sequences in $l^2(I, \mathcal{H})$, i.e. the sequences with compact supports; we also abbreviate $l^2 := l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^p)$, $l_0^2 := l_0^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^p)$.

2. Preliminaries. Let us recall some basic facts of the theory of abstract boundary triplets and the corresponding Weyl functions, cf. [11, 12, 15].

The set $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of closed linear relations in $\mathcal{H}$ is the set of closed linear subspaces of $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Recall that $\text{dom}(\Theta) = \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ran}(\Theta) = \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}$, and $\text{mul}(\Theta) = \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\}$ are the domain, the range, and the multivalued part of Θ . A closed linear operator A in $\mathcal{H}$ is identified with its graph $\text{gr}(A)$, so that the set $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ of closed linear operators in $\mathcal{H}$ is viewed as a subset of $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. In particular, a linear relation Θ is an operator if and only if $\text{mul}(\Theta)$ is trivial. We recall that the adjoint relation $\Theta^* \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of $\Theta \in \widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ is defined by

$$\Theta^* = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} : (f', h)_{\mathcal{H}} = (f, h')_{\mathcal{H}} \text{ for all } \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \in \Theta \right\}.$$

A linear relation Θ is said to be *symmetric* if $\Theta \subset \Theta^*$ and self-adjoint if $\Theta = \Theta^*$.

For a symmetric linear relation $\Theta \subseteq \Theta^*$ in $\mathcal{H}$ the multivalued part $\text{mul}(\Theta)$ is the orthogonal complement of $\text{dom}(\Theta)$ in $\mathcal{H}$. Therefore setting $\mathcal{H}_{\text{op}} := \overline{\text{dom}(\Theta)}$ and $\mathcal{H}_{\infty} = \text{mul}(\Theta)$, one arrives at the orthogonal decomposition $\Theta = \Theta_{\text{op}} \oplus \Theta_{\infty}$ where Θ_{op} is a symmetric operator in $\mathcal{H}_{\text{op}}$, the operator part of Θ , and $\Theta_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix} : f' \in \text{mul}(\Theta) \right\}$, a “pure” linear relation in $\mathcal{H}_{\infty}$.

Let A be a densely defined closed symmetric operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $n_{\pm}(A) = \dim(\mathfrak{N}_{\pm i}) \leq \infty$, where $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - z)$ is the defect subspace.

DEFINITION 2.1. ([15]) A triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is called a *boundary triplet* for the adjoint operator A^* if $\mathcal{H}$ is an auxiliary Hilbert space and $\Gamma_0, \Gamma_1 : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$ are linear mappings such that the abstract Green identity

$$(A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*),$$

holds and the mapping $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is surjective.

First, note that a boundary triplet for A^* exists whenever the deficiency indices of A are equal, $n_+(A) = n_-(A)$. Moreover, $n_{\pm}(A) = \dim(\mathcal{H})$ and

$$\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \text{dom}(A).$$

Note also that Γ is a bounded mapping from $\mathfrak{H}_+ = \text{dom}(A^*)$ equipped with the graph norm to $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

A boundary triplet for A^* is not unique. Moreover, for any self-adjoint extension $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ of A there exists a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ such that $\ker(\Gamma_0) = \text{dom}(\tilde{A})$.

In [11, 12] the concept of the classical Weyl–Titchmarsh m -function from the theory of Sturm–Liouville operators was generalized to the case of symmetric operators with equal deficiency indices. The role of abstract Weyl functions in the extension theory is similar to that of the classical Weyl–Titchmarsh m -function in the spectral theory of singular Sturm–Liouville operators.

DEFINITION 2.2. ([11]) Let A be a densely defined closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices and let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* . The operator valued functions $\gamma(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ and $M(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ defined by

$$\gamma(z) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1} \quad \text{and} \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z), \quad z \in \rho(A_0), \quad (8)$$

are called the γ -field and the Weyl function, respectively, corresponding to the boundary triplet Π .

The γ -field $\gamma(\cdot)$ and the Weyl function $M(\cdot)$ in (8) are well defined. Moreover, both $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are holomorphic on $\rho(A_0)$ and the following relations hold (see [11])

$$\gamma(z) = (I + (z - \zeta)(A_0 - z)^{-1})\gamma(\zeta), \quad z, \zeta \in \rho(A_0), \quad (9)$$

$$M(z) - M(\zeta)^* = (z - \bar{\zeta})\gamma(\zeta)^*\gamma(z), \quad z, \zeta \in \rho(A_0). \quad (10)$$

Identities (9) and (10) mean that $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are the γ -field and the Q -function of the operator A_0 , respectively, in the sense of M. Krein (see [1]). It follows from (10) that $M(\cdot)$ is an $R[\mathcal{H}]$ -function (or *Nevanlinna function*), i.e. $M(\cdot)$ is an $(\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -valued) holomorphic function on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfying

$$\text{Im } z \cdot \text{Im } M(z) \geq 0, \quad M(z)^* = M(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Moreover, due to (10) $M(\cdot) \in R^u[\mathcal{H}]$, i.e. it satisfies $0 \in \rho(\text{Im } M(i))$.

PROPOSITION 2.3. ([11, Theorem 2.2]) Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* and let $M(\cdot)$ and $\gamma(\cdot)$ be the corresponding Weyl function and the γ -field. Then for any $\tilde{A} = A_{\Theta} \in \text{Ext}_A$ with $\rho(A_{\Theta}) \neq \emptyset$ the following Krein type formula holds:

$$(A_{\Theta} - z)^{-1} - (A_0 - z)^{-1} = \gamma(z)(\Theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}), \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_{\Theta}). \quad (11)$$

Formula (11) is a generalization of the known Krein formula for canonical resolvents (cf. [1]). It establishes a one-to-one correspondence between the set of proper extensions $\bar{A} = A_\Theta$ with non-empty resolvent set and the set of linear relations Θ in $\mathcal{H}$. Note also that all quantities entering into (11) are expressed in terms of the boundary triplet Π (see (8)) (cf. [11, 12]).

3. Boundary triplets for the Dirac building blocks. Let D be the differential expression

$$D = -i c \frac{d}{dx} \otimes \sigma_1 + \frac{c^2}{2} \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} c^2/2 & -i c \frac{d}{dx} \\ -i c \frac{d}{dx} & -c^2/2 \end{pmatrix} \otimes I_p \quad (12)$$

acting on $\mathbb{C}^{2p}$ -valued functions of a real variable. Here

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad (13)$$

are the Pauli matrices in $\mathbb{C}^{2p}$ and $c > 0$ denotes the velocity of light.

We set

$$k(z) := c^{-1} \sqrt{z^2 - (c^2/2)^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

where the branch of the multifunction $\sqrt{\cdot}$ is selected such that $k(x) > 0$ for $x > c^2/2$. It is easily seen that $k(\cdot)$ is holomorphic in $\mathbb{C}$ with two cuts along the half-lines $(-\infty, -c^2/2]$ and $[c^2/2, \infty)$, and $k(\bar{z}) = -\overline{k(z)}$.

Thus, $k(\cdot)$ itself is not R -function (Nevanlinna function), although the extension

$$\tilde{k}(z) = \begin{cases} k(z), & z \in \mathbb{C}_+, \\ -k(\bar{z}), & z \in \mathbb{C}_- \end{cases} \quad (15)$$

is already a R -function, i.e. a holomorphic function in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, that maps $\mathbb{C}_+$ into $\mathbb{C}_+$ and satisfies $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Next we put

$$k_1(z) := \frac{c k(z)}{z + c^2/2} = \sqrt{\frac{z - c^2/2}{z + c^2/2}}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

We can independently define the right-hand side in $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -c^2/2] \cup [c^2/2, \infty))$ by selecting the branch of the corresponding multifunction in such a way that $\sqrt{\frac{z - c^2/2}{z + c^2/2}} > 0$ for $x > c^2/2$.

Next we construct boundary triplets using the technique of [16] and [18].

3.1. The case of finite interval. We begin with the constructions of a boundary triplet for the maximal Dirac operator on an interval.

Let D_n be the minimal operator generated in $L^2[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}$ by the differential expression (12)

$$D_n = D \upharpoonright \text{dom}(D_n), \quad \text{dom}(D_n) = W_0^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}. \quad (17)$$

We also put $d_n := x_n - x_{n-1} > 0$.

Lemma 3.1. D_n is a symmetric operator with deficiency indices $n_{\pm}(D_n) = 2p$. Its adjoint D_n^* is given by

$$D_n^* = D \upharpoonright \text{dom}(D_n^*), \quad \text{dom}(D_n^*) = W^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}.$$

The defect subspace $\mathfrak{N}_z := \ker(D_n^* - z)$ is spanned by the vector functions $\widehat{f}_n^{\pm}(\cdot, z)$,

$$\widehat{f}_n^{\pm}(x, z) := \left\{ \underbrace{e^{\pm i k(z) x} \quad \dots \quad e^{\pm i k(z) x}}_p \quad \underbrace{\pm k_1(z) e^{\pm i k(z) x} \quad \dots \quad \pm k_1(z) e^{\pm i k(z) x}}_p \right\}^{\top}. \quad (18)$$

Moreover, the following is true:

(i) The triplet $\widetilde{\Pi}^{(n)} = \{\mathbb{C}^{2p}, \widetilde{\Gamma}_0^{(n)}, \widetilde{\Gamma}_1^{(n)}\}$, where

$$\widetilde{\Gamma}_0^{(n)} f = \widetilde{\Gamma}_0^{(n)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \widehat{f}_I(x_{n-1}+) \\ i c \widehat{f}_{II}(x_n-) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_1^{(n)} f = \widetilde{\Gamma}_1^{(n)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_{II} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} i c \widehat{f}_{II}(x_{n-1}+) \\ \widehat{f}_I(x_n-) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

forms a boundary triplet for D_n^* .

(ii) The spectrum of the operator $D_{n,0} := D_n^* \upharpoonright \ker \widetilde{\Gamma}_0^{(n)}$, where

$$\text{dom}(D_{n,0}) = \{\{\widehat{f}_I, \widehat{f}_{II}\}^{\top} \in W^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p} : \widehat{f}_I(x_{n-1}+) = \widehat{f}_{II}(x_n-) = 0\}, \quad (20)$$

is discrete, of the multiplicity p

$$\sigma(D_{n,0}) = \sigma_d(D_{n,0}) = \left\{ \pm \sqrt{\frac{c^2 \pi^2}{d_n^2} \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{2}\right)^2}, \quad j = 0, 1, \dots \right\}. \quad (21)$$

(iii) The γ -field $\widetilde{\gamma}_n(\cdot) : \mathbb{C}^{2p} \rightarrow L^2[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}$, corresponding to the triplet $\widetilde{\Pi}^{(n)}$ is given in the standard basis in $\mathbb{C}^{2p}$ by ($z \in \rho(D_{n,0})$)

$$\widetilde{\gamma}_n(z) \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{r_n} \begin{pmatrix} \cos(k(z)(x_n - x)) I_p & -\frac{1}{c k_1(z)} \sin(k(z)(x_{n-1} - x)) I_p \\ -i k_1(z) \sin(k(z)(x_n - x)) I_p & -i c^{-1} \cos(k(z)(x_{n-1} - x)) I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

where $r_n := \cos(d_n k(z))$.

(iv) The Weyl function $\widetilde{M}_n(\cdot)$, corresponding to the triplet $\widetilde{\Pi}^{(n)}$ is

$$\widetilde{M}_n(z) = \frac{1}{\cos(d_n k(z))} \begin{pmatrix} c k_1(z) \sin(d_n k(z)) & 1 \\ 1 & (c k_1(z))^{-1} \sin(d_n k(z)) \end{pmatrix} \otimes I_p, \quad z \in \rho(D_{n,0}). \quad (23)$$

Proof.

(i) and (ii) are straightforward.

(iii) Since $\widehat{f}_n^-$ and $\widehat{f}_n^+$ form a basis in the defect subspace $\mathfrak{N}_z$, we get from the definition of the γ -field,

$$\widetilde{\gamma}_n(z) \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix} = \widehat{w}_1(z) \widehat{f}_n^-(x, z) + \widehat{w}_2(z) \widehat{f}_n^+(x, z).$$

Applying to this identity the mapping $\widetilde{\Gamma}_0^{(n)}$ and using (18), (19) and definition (8) we get

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ik(z)x_{n-1}} I_p & e^{ik(z)x_{n-1}} I_p \\ -i c k_1(z) e^{-ik(z)x_n} I_p & i c k_1(z) e^{ik(z)x_n} I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{w}_1(z) \\ \widehat{w}_2(z) \end{pmatrix} =: \Lambda(z) \begin{pmatrix} \widehat{w}_1(z) \\ \widehat{w}_2(z) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Hence $\begin{pmatrix} \widehat{w}_1(z) \\ \widehat{w}_2(z) \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(z) \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix}$. Setting $\Delta(z) := \det \Lambda(z) = 2 i c k_1(z) \cos(d_n k(z))$ we find

$$\begin{aligned} \widetilde{\gamma}(z) \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta(z)} (i c k_1(z) e^{ik(z)x_n} \widehat{v}_1 - e^{ik(z)x_{n-1}} \widehat{v}_2) \begin{pmatrix} e^{-ik(z)x} \\ \vdots \\ -k_1(z) e^{-ik(z)x} \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\Delta(z)} (i c k_1(z) e^{-ik(z)x_n} \widehat{v}_1 + e^{-ik(z)x_{n-1}} \widehat{v}_2) \begin{pmatrix} e^{ik(z)x} \\ \vdots \\ k_1(z) e^{ik(z)x} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(k(z)d_n)} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(k(z)(x_n - x)) I_p & -(c k_1(z))^{-1} \sin(k(z)(x_{n-1} - x)) I_p \\ -i k_1(z) \sin(k(z)(x_n - x)) I_p & (i c)^{-1} \cos(k(z)(x_{n-1} - x)) I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

This proves (22).

(iv) This statement is immediate from (22), (19) and the identity $\widetilde{M}_n(z) = \widetilde{\Gamma}_1^{(n)} \widetilde{\gamma}_n(z)$.

□

3.2. The case of half-line. In this section we provide boundary triplets for the Dirac operator D on a halfline. The proofs are straightforward and are omitted.

Let D_{a-} denote the minimal Dirac operator in $L^2(\mathbb{R}_a^-) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, where $\mathbb{R}_a^- := (-\infty, a)$, i.e.

$$D_{a-} = D \upharpoonright \text{dom}(D_{a-}), \quad \text{dom}(D_{a-}) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}_a^-) \otimes \mathbb{C}^{2p}. \quad (25)$$

Lemma 3.2. D_{a-} is a closed symmetric operator with deficiency indices $n_{\pm}(D_{a-}) = p$. Its adjoint D_{a-}^* is given by

$$D_{a-}^* = D \upharpoonright \text{dom}(D_{a-}^*), \quad \text{dom}(D_{a-}^*) = W^{1,2}(\mathbb{R}_a^-) \otimes \mathbb{C}^{2p}.$$

The defect subspace $\ker(D_{a-}^* - z)$ is spanned by the vector function

$$\widehat{f}_a^-(x, z) := \left\{ \underbrace{e^{-ik(z)x} \quad \dots \quad e^{-ik(z)x}}_p \quad \underbrace{-k_1(z) e^{-ik(z)x} \quad \dots \quad -k_1(z) e^{-ik(z)x}}_p \right\}^{\top}. \quad (26)$$

Moreover, the following hold

(i) The triplet $\Pi^{(a-)} = \{\mathbb{C}^p, \Gamma_0^{(a-)}, \Gamma_1^{(a-)}\}$ where

$$\Gamma_0^{(a-)} f = \tilde{\Gamma}_0^{(a-)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_{II} \end{pmatrix} := i c \widehat{f}_{II}(a-), \quad \Gamma_1^{(a-)} f = \Gamma_1^{(a-)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_{II} \end{pmatrix} := \widehat{f}_I(a-), \quad (27)$$

forms a boundary triplet for D_{a-}^* .

(ii) The spectrum of the operator $D_{a-,0} := D_{a-}^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0^{(a-)}$ is absolutely continuous, of the multiplicity p ,

$$\sigma(D_{a-,0}) = \sigma_{ac}(D_{a-,0}) = (-\infty, -c^2/2] \cup [c^2/2, +\infty). \quad (28)$$

(iii) The corresponding γ -field $\gamma_{a-}(\cdot) : \mathbb{C}^p \rightarrow L^2(\mathbb{R}_a^-) \otimes \mathbb{C}^{2p}$ is given by

$$\gamma_{a-}(z)\widehat{w} = \widehat{w} \frac{i e^{i k(z) a}}{c k_1(z)} \widehat{f}_a^-(z), \quad z \in \rho(D_{a-,0}). \quad (29)$$

(iv) The Weyl function $M_{a-}(\cdot)$, corresponding to the triplet $\Pi^{(a-)}$ is

$$M_{a-}(z) = \frac{i}{c k_1(z)} I_p, \quad z \in \rho(D_{a-,0}). \quad (30)$$

Next we denote by D_{b+} the minimal Dirac operator in $L^2(\mathbb{R}_b^+) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, where $\mathbb{R}_b^+ := (b, +\infty)$,

$$D_{b+} = D \upharpoonright \text{dom}(D_{a-}), \quad \text{dom}(D_{b+}) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}_b^+) \otimes \mathbb{C}^{2p}. \quad (31)$$

Lemma 3.3. D_{b+} is a symmetric operator with the deficiency indices $n_{\pm}(D_{b+}) = p$. The adjoint operator D_{b+}^* is given by

$$D_{b+}^* = D \upharpoonright \text{dom}(D_{b+}^*), \quad \text{dom}(D_{b+}^*) = W^{1,2}(\mathbb{R}_b^+) \otimes \mathbb{C}^{2p}, \quad (32)$$

and the defect subspace $\mathfrak{N}_z = \ker(D_{b+}^* - z)$ is spanned by the vector function $\widehat{f}_b^+(\cdot, z)$,

$$\widehat{f}_b^+(x, z) := \left\{ \underbrace{e^{i k(z) x} \quad \dots \quad e^{i k(z) x}}_p \quad \underbrace{k_1(z) e^{i k(z) x} \quad \dots \quad k_1(z) e^{i k(z) x}}_p \right\}^{\top}. \quad (33)$$

Moreover, the following is true:

(i) The direct sum $\Pi^{(b+)} = \{\mathbb{C}^p, \Gamma_0^{(b+)}, \Gamma_1^{(b+)}\}$ where

$$\Gamma_0^{(b+)} f = \tilde{\Gamma}_0^{(b+)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_{II} \end{pmatrix} := \widehat{f}_I(b+), \quad \Gamma_1^{(b+)} f = \Gamma_1^{(b+)} \begin{pmatrix} \widehat{f}_I \\ \widehat{f}_{II} \end{pmatrix} := i c \widehat{f}_{II}(b+), \quad (34)$$

forms a boundary triplet for D_{b+}^* .

(ii) The spectrum of the operator $D_{b+,0} := D_{b+}^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0^{(b+)} = D_{b+,0}^*$ is absolutely continuous of the multiplicity p ,

$$\sigma(D_{b+,0}) = \sigma_{ac}(D_{b+,0}) = (-\infty, -c^2/2] \cup [c^2/2, +\infty). \quad (35)$$

(iii) The corresponding γ -field $\gamma_{b+}(\cdot) : \mathbb{C}^p \rightarrow L^2(\mathbb{R}_b^+) \otimes \mathbb{C}^{2p}$ is

$$\gamma_{b+}(z)\hat{w} = \hat{w} e^{-i k(z)b} f_b^+(z) I_p, \quad z \in \rho(D_{b+,0}). \quad (36)$$

(iv) The Weyl function $M_{b+}(\cdot)$, corresponding to the triplet $\Pi^{(b+)}$ is

$$M_{b+}(z) = i c k_1(z) I_p, \quad z \in \rho(D_{b+,0}). \quad (37)$$

4. Boundary triplets for Dirac operators with point interactions. Let $X = \{x_n\}_{n=0}^\infty (\subset \mathbb{R})$ be a discrete set of the half-line, $x_{n-1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$. We set

$$\begin{aligned} a &:= x_0, & b &:= \sup X \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \\ d_n &:= x_n - x_{n-1}, & d_*(X) &:= \inf_n d_n, & d^*(X) &:= \sup_n d_n. \end{aligned} \quad (38)$$

In what follows we always assume for convenience that $a := x_0 = 0$. Then we define the minimal operator D_X on $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{C}^{2p}$ by setting either

$$D_X := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D_n \quad \text{or} \quad D_X := \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} D_n \right) \bigoplus D_{b+}. \quad (39)$$

Note that the component D_{b+} appears in (39) if and only if $b < +\infty$. Clearly, in the first case ($b = +\infty$)

$$\text{dom}(D_X) = W_0^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} W_0^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p}. \quad (40)$$

Here we construct a boundary triplet for the operator $D_X^* := \bigoplus_{n=1}^\infty D_n^*$. First we show that without additional restriction on X the direct sum $\bigoplus_{n=1}^\infty \tilde{\Pi}^{(n)}$ of boundary triplets $\tilde{\Pi}^{(n)}$ given by (19) forms only a *generalized boundary triplet* for D_X^* .

PROPOSITION 4.1. Let X be as above, $d^*(X) < \infty$, and let $\tilde{\Pi}^{(n)} = \{\mathbb{C}^{2p}, \tilde{\Gamma}_0^{(n)}, \tilde{\Gamma}_1^{(n)}\}$ be the boundary triplet for the operator D_n^* defined in Lemma 3.1. Let also $A := D_X := \bigoplus_1^\infty D_n$, $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, and $\tilde{\Gamma}_j = \bigoplus_{n=1}^\infty \tilde{\Gamma}_j^{(n)}$, $j \in \{0, 1\}$, i.e.

$$\tilde{\Gamma}_0 \begin{pmatrix} \hat{f}_I \\ \hat{f}_{II} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{f}_I(x_{n-1}+) \\ i c \hat{f}_{II}(x_n-) \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \tilde{\Gamma}_1 \begin{pmatrix} \hat{f}_I \\ \hat{f}_{II} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} i c \hat{f}_{II}(x_{n-1}+) \\ \hat{f}_I(x_n-) \end{pmatrix} \right\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad (41)$$

for any $f = \begin{pmatrix} \hat{f}_I \\ \hat{f}_{II} \end{pmatrix} \in \text{dom}(D_X^*)$. Then

(i) The mappings $\tilde{\Gamma}_0$ and $\tilde{\Gamma}_1$ are densely defined and closed. Moreover,

$$\begin{aligned} \text{dom}(A_*) &:= \text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) \cap \text{dom}(\tilde{\Gamma}_1) = \text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) = \text{dom}(\tilde{\Gamma}_1) = \\ &= \left\{ f = \begin{pmatrix} \hat{f}_I \\ \hat{f}_{II} \end{pmatrix} \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : \right. \\ &\quad \left. : \{ \hat{f}_j(x_{n-1}+) \}_1^\infty, \{ \hat{f}_j(x_n-) \}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p}, j \in \{1, 2\} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

(ii) The direct sum $\tilde{\Pi} := \bigoplus_{n=1}^\infty \tilde{\Pi}^{(n)} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ forms a B -generalized boundary triplet for D_X^* in the sense of [9, Def. 2.7]. In particular, $\text{ran}(\tilde{\Gamma}_0) = \mathcal{H}$.

(iii) The transposed triplet $\tilde{\Pi}^\top = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0^\top, \tilde{\Gamma}_1^\top\} := \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_1, -\tilde{\Gamma}_0\}$ also forms a B -generalized boundary triplet for D_X^* . In particular, $\text{ran}(\tilde{\Gamma}_1) = \mathcal{H}$.

(iv) The triplet $\tilde{\Pi}$ is an (ordinary) boundary triplet for the operator $D_X^* = \bigoplus_{n=1}^\infty D_n^*$ if and only if $0 < d_*(X) < d^*(X) < \infty$.

Proof.

(i) By definition (19), the domain of $\tilde{\Gamma}_0$ is given by

$$\text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) = \left\{ f \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p} : \{ \hat{f}_I(x_{n-1}+) \}_1^\infty, \{ \hat{f}_{II}(x_n-) \}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p} \right\}. \quad (43)$$

Since $d^*(X) < \infty$, it follows from [9, (3.36)] that

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\hat{f}_I(x_n-) - \hat{f}_I(x_{n-1}+)|^2 \leq d^*(X) \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n^{-1} |\hat{f}_I(x_n-) - \hat{f}_I(x_{n-1}+)|^2 < \infty. \quad (44)$$

Combining this inequality with (43), yields $\{ \hat{f}_I(x_n-) \}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$. The inclusion $\{ \hat{f}_{II}(x_{n-1}+) \}_1^\infty \in l^2(\mathbb{N})$ is proved in just the same way. Thus, $\text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) = \text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) \cap \text{dom}(\tilde{\Gamma}_1)$. The equality $\text{dom}(\tilde{\Gamma}_1) = \text{dom}(\tilde{\Gamma}_0) \cap \text{dom}(\tilde{\Gamma}_1)$ is proved similarly.

(ii) Due to (i) $\ker \tilde{\Gamma}_0 \subset \text{dom}(\tilde{\Gamma}_1) = \text{dom}(A_*)$. Hence

$$A_{*0} := A_* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0 = A^* \upharpoonright \ker \tilde{\Gamma}_0 = \bigoplus_{n=1}^\infty D_{n,0} = A_0 = A_0^*, \quad (45)$$

i.e. $A_{*0} = A_0$ is selfadjoint. The Green's identity (6) is obviously satisfied for $f, g \in \text{dom}(A_*)$. It remains to show that $\text{ran}(\Gamma_0) = \mathcal{H} = l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$. This fact is immediate from (43) and [9, Prop. 3.5(iii)].

(iii) The proof is similar to the proof of (ii).

(iv) Let conditions $0 < d_*(X) < d^*(X) < \infty$ be satisfied. Then, by [9, Prop. 3.5(iii)], $\text{dom}(\pi_\pm) = W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p}$. Combining this fact with (42) we get $\text{dom}(\tilde{\Gamma}_j) = W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, $j \in \{0, 1\}$. Hence Green's formula (6) holds for all $f, g \in \text{dom}(A^*)$.

Next let us prove the surjectivity of the mapping $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$. Let $a_k = \{a_{kn}\}_{n=1}^\infty \in l^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, $k \in \{1, \dots, 4\}$. By [9, Prop. 3.5(iii)], there exist $\hat{f}_I, \hat{f}_{II} \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p}$.

$\otimes \mathbb{C}^{2p}$ such that

$$\begin{aligned}\pi_+(\widehat{f}_I) &= \{\widehat{f}_I(x_{n-1}+)\}_{n=1}^\infty = \{a_{1n}\}_{n=1}^\infty, & \pi_-(\widehat{f}_I) &= \{\widehat{f}_I(x_n-)\}_{n=1}^\infty = \{a_{4n}\}_{n=1}^\infty, \\ \pi_+(\widehat{f}_{II}) &= \{ic\widehat{f}_{II}(x_{n-1}+)\}_{n=1}^\infty = \{a_{3n}\}_{n=1}^\infty, & \pi_-(\widehat{f}_{II}) &= \{ic\widehat{f}_{II}(x_n-)\}_{n=1}^\infty = \{a_{2n}\}_{n=1}^\infty.\end{aligned}$$

Combining these relations with (41), yields the surjectivity of the mapping $\widetilde{\Gamma}$.

Conversely, let $\text{dom}(\widetilde{\Gamma}_j) = W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p}$, $j \in \{0, 1\}$. Then, by (41), $\text{dom}(\pi_\pm) = W^{1,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) \otimes \mathbb{C}^{2p}$. Now [9, Prop. 3.5(iii)] yields the condition $d_*(X) > 0$. $\square$

To obtain a boundary triplet for the operator $D_X^* = \bigoplus_{n=1}^\infty D_n^*$ in the case $d_*(X) = 0$ we regularize the boundary triplets $\widetilde{\Pi}_n$ for D_n^* , $n \in \mathbb{N}$, given by (19). To this end we will apply the regularization procedure proposed in [9, Cor. 2.13(iii)] (cf. formula [9, (2.29)]).

Theorem 4.2. *Let $X = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ be as above and $d^*(X) < +\infty$. Define the mappings*

$$\Gamma_j^{(n)} : W^{1,2}[x_{n-1}, x_n] \otimes \mathbb{C}^{2p} \rightarrow \mathbb{C}^{2p}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j \in \{0, 1\},$$

by setting

$$\Gamma_0^{(n)} f := \begin{pmatrix} d_n^{1/2} \widehat{f}_I(x_{n-1}+) \\ ic d_n^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}} \widehat{f}_{II}(x_n-) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\Gamma_1^{(n)} f := \begin{pmatrix} ic d_n^{-1/2} (\widehat{f}_{II}(x_{n-1}+) - \widehat{f}_{II}(x_n-)) \\ d_n^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}\right)^{-1/2} (\widehat{f}_I(x_n-) - \widehat{f}_I(x_{n-1}+) - ic d_n \widehat{f}_{II}(x_n-)) \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Then:

- (i) For any $n \in \mathbb{N}$, $\Pi^{(n)} = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^{(n)}, \Gamma_1^{(n)}\}$ is a boundary triplet for D_n^* .
- (ii) The direct sum $\Pi := \bigoplus_{n=1}^\infty \Pi^{(n)} = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ with $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{2p}) \otimes \mathbb{C}^{2p}$ and $\Gamma_j = \bigoplus_{n=1}^\infty \Gamma_j^{(n)}$, $j \in \{0, 1\}$, is a boundary triplet for the operator $D_X^* = \bigoplus_{n=1}^\infty D_n^*$.

Proof. According to Lemma 3.1(ii) each operator $D_{n,0} = D_{n,0}^*$ has a gap $(-\alpha_n, \alpha_n) \supset \subset (-c^2/2, c^2/2)$. Hence the symmetric operator $D_X = \bigoplus_{n=1}^\infty D_n$ has a gap $(-\alpha, \alpha) := \bigcap_{n=1}^\infty (-\alpha_n, \alpha_n)$. Since $d^*(X) < \infty$, it follows from (21) that $\alpha > c^2/2$, i.e. $(-\alpha, \alpha) \supset \subset (-c^2/2, c^2/2)$. Moreover, by (23),

$$\widetilde{M}_n \left(\frac{c^2}{2} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & I_p \\ I_p & d_n I_p \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \widetilde{M}'_n \left(\frac{c^2}{2} \right) = \begin{pmatrix} d_n I_p & d_n^2/2 I_p \\ d_n^2/2 I_p & (d_n/c^2 + d_n^3/3) I_p \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Since $c^2/2 \in (0, \alpha)$, we can apply [9, Cor. 2.13] to regularize the sequence of boundary triplets $\widetilde{\Pi}^{(n)} = \{\mathbb{C}^{2p}, \widetilde{\Gamma}_0^{(n)}, \widetilde{\Gamma}_1^{(n)}\}$ for D_n^* , $n \in \mathbb{N}$, defined by (19). Starting with (48) we define the matrices $R_n = R_n^*$ and $Q_n = Q_n^*$ by setting

$$R_n := \begin{pmatrix} d_n^{1/2} I_p & \mathbb{O}_p \\ \mathbb{O}_p & d_n^{3/2} \sqrt{1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}} I_p \end{pmatrix}, \quad Q_n := \widetilde{M}_n \left(\frac{c^2}{2} \right) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & I_p \\ I_p & d_n I_p \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (49)$$

Next we define a new sequence of boundary triplets $\Pi_n = \{\mathbb{C}^{2p}, \Gamma_0^{(n)}, \Gamma_1^{(n)}\}$ by formulas [9, (2.29)],

$$\Gamma_0^{(n)} := R_n \widetilde{\Gamma}_0^{(n)}, \quad \Gamma_1^{(n)} := R_n^{-1}(\widetilde{\Gamma}_1^{(n)} - Q_n \widetilde{\Gamma}_0^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (50)$$

Clearly, the corresponding Weyl function is

$$M_n(z) = R_n^{-1}(\widetilde{M}_n(z) - Q_n)R_n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (51)$$

Let us check that the family $\{M_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ of the Weyl functions satisfy conditions [9, (2.28)] of [9, Cor. 2.13]. Indeed, by (49), $M_n(c^2/2) = 0$. Moreover, combining (51) with (49) and (48) we get

$$\begin{aligned} M'_n\left(\frac{c^2}{2}\right) &= R_n^{-1} \widetilde{M}'_n\left(\frac{c^2}{2}\right) R_n^{-1} = R_n^{-1} \begin{pmatrix} d_n I_p & d_n^2/2 I_p \\ d_n^2/2 I_p & (d_n/c^2 + d_n^3/3) I_p \end{pmatrix} R_n^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} I_p & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}\right)^{-1/2} I_p \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}\right)^{-1/2} I_p & \frac{1}{3} \frac{3+c^2 d_n^2}{1+c^2 d_n^2} I_p \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (52)$$

Hence $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|M'_n(c^2/2)\| < \infty$ and the first condition in [9, (2.28)] is satisfied. Further,

$$\begin{aligned} (M'_n(c^2/2))^{-1} &= R_n \widetilde{M}'_n(c^2/2)^{-1} R_n = \\ &= \frac{1}{\Delta(c^2/2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \frac{3+c^2 d_n^2}{1+c^2 d_n^2} I_p & -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}\right)^{-1/2} I_p \\ -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{c^2 d_n^2}\right)^{-1/2} I_p & I_p \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (53)$$

where $\Delta^{-1}(c^2/2) = 12(1+c^2 d_n^2)(12+c^2 d_n^2)^{-1}$. Hence $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(M'_n(c^2/2))^{-1}\| < \infty$ and the second condition in [9, (2.28)] is satisfied too. Thus, by [9, Cor. 2.13], the direct sum $\bigoplus_{n=1}^\infty \Pi^{(n)}$ is a boundary triplet for the operator D_X^* .

To complete the proof it remains to note that the definition (50) of boundary triplets Π_n for D_n^* , $n \in \mathbb{N}$, coincides with the definition (46), (47). $\square$

1. Akhiezer N.I., Glazman I.M. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces. – Nauka, 1978. – 544 p.
2. Arrizabalaga N., Mas A., Vega L. Shell interactions for Dirac operators // J. Math. Pures Appl. – 2014. – **9**, 102 (4). – P. 617–639.
3. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics, Sec. Edition. – AMS Chelsea Publ., 2005. – 452 p.
4. Albeverio S., Kurasov P. Singular Perturbations of Differential Operators and Schrödinger Type Operators. – Cambridge Univ. Press, 2000. – 429 p.
5. Arnbak H., Christiansen P.L., Gaididei Yu.B. Non-relativistic and relativistic scattering by short-range potentials // Phil. Trans. R. Soc. – 2011. – **369**. – P. 1228–1244.
6. Behrndt J., Exner P., Holzmam M., Lotoreichik V. On the spectral properties of Dirac operators with electrostatic δ -shell interactions // J. Math. Pures Appl. [in press]. – 2016. – arXiv:1609.00608v1. – 32 p.

7. *Brasche J.F., Malamud M.M., Neidhardt H.* Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integr. Eq. Oper. Theory. – 2002. – **43**. – P. 264–289.
8. *Budyka V., Malamud M., Posilicano A.* Nonrelativistic limit for $2p \times 2p$ -Dirac operators with point interactions on a discrete Set // RJMP. – 2017. – **24**, no. 4. – P. 426–435.
9. *Carlone R., Malamud M., Posilicano A.* On the spectral theory of Gesztesy–Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set // J. Differential Equations. – **254**, no. 9. – P. 3835–3902.
10. *Derkach V.A., Hassi S., Malamud M.M. and de Snoo H.S.V.* Boundary relations and their Weyl families // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – **358**, no. 12. – P. 5351–5400.
11. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // J. Funct. Anal. – 1991. – **95**. – P. 1–95.
12. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // J. Math. Sci. – 1995, – **73**, no 2. – P. 141–242.
13. *Exner P.* Seize ans après, *Appendix K to “Solvable Models in Quantum Mechanics”* by Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H., Sec. Edition. – AMS Chelsea Publ., 2004. – P. 453–471.
14. *Gesztesy F., Šeba P.* New analytically solvable models of relativistic point interactions // Lett. Math. Phys. – 1987. – **13**. – P. 345–358.
15. *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Mathematics and its Applications (Soviet Series) – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991. – **48**. – 347 p.
16. *Kostenko A.S., Malamud M.M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // J. Differential Equations. – 2010. – **249**. – P. 253–304.
17. *Kostenko A.S., Malamud M.M., Natyagailo D.D.* Matrix Schrödinger operator with δ -interactions // Mathematical Notes. – 2016. – **100**, no 1. – P. 48–64.
18. *Malamud M.M., Neidhardt H.* Sturm–Liouville boundary value problems with operator potentials and unitary equivalence // J. Differential Equations. – 2012. – **252**. – P. 5875–5922.
19. *de Oliveira C.R.* Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics, Birkhäuser. – Basel, 2009. – 394 p.
20. *Schmüdgen, K.* Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space, Springer-Verlag. – New York, 2012. – 392 p.
21. *Thaller B.* The Dirac Equation, Texts and Monographs in Physics. – Springer, 1992. – 358 p.

В. С. Будыка

Граничные тройки для $2p \times 2p$ операторов Дирака с точечными взаимодействиями на дискретном множестве.

Настоящая статья посвящена изучению граничных троек, *гамма*-поля и соответствующих функций Вейля для $2p \times 2p$ операторов Дирака с точечными взаимодействиями на дискретном множестве.

Ключевые слова: $2p \times 2p$ оператор Дирака, граничные тройки, γ -поле, функция Вейля.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», г. Донецк
 ГОУ ВПО «Донецкая академия управления и государственной
 службы при Главе Донецкой Народной Республики»
budyka.vik@gmail.com

Received 19.07.17

УДК 517.444

©2017. В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

ОТОБРАЖЕНИЯ СО СВОЙСТВОМ ОБОВЩЕННОЙ ТРАНСМУТАЦИИ

Изучаются трансмутационные операторы, связанные с разложениями по собственным функциям лапласиана в евклидовых пространствах. Для этих операторов исследуется обобщенное свойство гомоморфизма относительно соответствующих сверточных алгебр, трансмутационное свойство относительно подходящих дифференциальных операторов, связь между носителями образа и прообраза, а также свойство гомеоморфизма между соответствующими пространствами распределений.

1. Введение. Гомеоморфизмы со свойством трансмутации и их обобщения играют важную роль в гармоническом анализе на симметрических пространствах и в многочисленных приложениях к задачам интегральной геометрии, проблеме спектрального анализа и синтеза, теории уравнений свертки (см. [1–5] и библиографию к этим работам). Это объясняется тем, что трансмутационное свойство позволяет произвести редукцию многих задач к соответствующим проблемам одномерной теории (см. [1–5]). Далее такие задачи допускают полное решение с использованием результатов о свойствах пространства решений соответствующих одномерных уравнений [6] (см. также [4]). Реализация указанного подхода требует развития аппарата, связанного с изучением обобщенных сферических функций и сферических преобразований (см. [7]).

В данной работе мы продолжаем развитие теории трансмутационных отображений. Рассматривается случай, когда соответствующие отображения действуют из различных пространств гладких функций в шаре в пространство четных функций на интервале вещественной оси. Полученные результаты уточняют ряд результатов из работ [1–2], [4].

2. Обозначения и вспомогательные конструкции. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $\dot{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq R\}$.

Пусть $\mathcal{O}$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ – пространство финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathcal{O}$ функций и $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ – соответствующее пространство распределений в $\mathcal{O}$. Обозначим через $\mathcal{E}'(\mathcal{O})$ множество всех распределений из $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ с компактными носителями. Для распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathcal{O})$ символами $\text{supp } T$ и $\text{ord } T$ соответственно обозначаются носитель и порядок T . Положим

$$r_0(T) = \inf \{r > 0 : \text{supp } T \subset B_r\}.$$

Кроме того, обозначим через $r(T)$ точную нижнюю грань радиусов открытых шаров, содержащих носитель T .

Преобразование Фурье $\hat{T}$ распределения T определяется равенством

$$\hat{T}(\zeta) = \langle T(x), e^{-i(x_1\zeta_1 + \dots + x_n\zeta_n)} \rangle, \quad \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n,$$

где $\mathbb{C}^n$ – комплексное евклидово пространство размерности n . Символом $*$ обозначается свертка распределений в $\mathbb{R}^n$ для тех случаев, когда она существует.

Пусть $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\omega_{n-1} = n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ – площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $SO(n)$ – группа вращений $\mathbb{R}^n$, ρ и $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ – полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = x/\rho$). Обозначим через $\mathcal{H}_{n,k}$ множество всех однородных гармонических многочленов на $\mathbb{R}^n$ степени k . Сферической гармоникой степени k называется сужение на $\mathbb{S}^{n-1}$ некоторого многочлена из $\mathcal{H}_{n,k}$. Множество всех сферических гармоник степени k далее обозначается символом $\mathcal{H}^{n,k} = \mathcal{H}^{n,k}(\mathbb{S}^{n-1})$. Отметим, что $\mathcal{H}_{n,k}$ и $\mathcal{H}^{n,k}$ являются инвариантными относительно вращений комплексными векторными пространствами. Пусть $d(n, k)$ – размерность $\mathcal{H}^{n,k}$. Простые вычисления показывают, что $d(n, 0) = 1$, $d(n, 1) = n$ и

$$d(n, k) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2} \quad \text{при} \quad k \geq 2$$

(см. [8, гл. 4]). Всюду в дальнейшем $\mathcal{H}^{n,k}$ будет рассматриваться как подпространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. Как известно (см. [8, гл. 4]),

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_1(\sigma) \overline{h_2(\sigma)} d\omega(\sigma) = 0$$

для любых $h_1 \in \mathcal{H}^{n,k_1}$, $h_2 \in \mathcal{H}^{n,k_2}$, $k_1 \neq k_2$, где $d\omega$ – элемент площади на $\mathbb{S}^{n-1}$. Это означает, что $\mathcal{H}^{n,k_1}$ ортогонально $\mathcal{H}^{n,k_2}$ при $k_1 \neq k_2$.

Пусть Y_j^k ($j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$) – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$. Для $k = 0$ имеем $Y_1^k(\sigma) = 1/\sqrt{\omega_{n-1}}$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$. При $n = 2$ и $k \geq 1$ далее будет использоваться следующий базис в $\mathcal{H}^{n,k}$:

$$Y_1^k(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 + i\sigma_2)^k, \quad Y_2^k(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\sigma_1 - i\sigma_2)^k. \quad (1)$$

Положим $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$ при $x = \rho\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и любых $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя это соотношение, продолжим Y_j^k до многочлена на $\mathbb{C}^n$.

Пусть $T(\tau)$, $\tau \in SO(n)$ – квазирегулярное представление группы $SO(n)$ в пространстве $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, то есть $(T(\tau)f)(\sigma) = f(\tau^{-1}\sigma)$ для всех $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, $\sigma \in \mathbb{S}^{n-1}$. Как известно, $T(\tau)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных унитарных представлений $T^k(\tau)$, действующих в пространствах $\mathcal{H}^{n,k}(\mathbb{S}^{n-1})$. Кроме того, представления $T^k(\tau)$ неприводимы при $n \geq 3$. Пусть $\{t_{i,p}^k(\tau)\}$ – матрица представления $T^k(\tau)$, то есть

$$Y_j^k(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{i=1}^{d(n,k)} t_{i,j}^k(\tau) Y_i^k(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{n-1}. \quad (2)$$

Если $k = 0$, имеем $t_{1,1}^k(\tau) = 1$ для любого $\tau \in SO(n)$. При $n = 2$ и $k \geq 1$ из определения $t_{i,j}^k(\tau)$ получаем, что $t_{1,1}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{2,2}^k(\tau) = e^{ik\theta}$, где θ – поворот на угол θ в $\mathbb{R}^2$, соответствующий вращению $\tau \in SO(2)$. Кроме того, $t_{1,2}^k(\tau) = t_{2,1}^k(\tau) = 0$ для любого $\tau \in SO(2)$ (см. (1) и (2)). При $n \geq 3$ функции $t_{l,p}^k$ удовлетворяют следующим соотношениям ортогональности

$$\begin{cases} \int_{SO(n)} t_{l,p}^k(\tau) \overline{t_{l',p'}^{k'}(\tau)} d\tau = 0, & \text{если } (k, l, p) \neq (k', l', p'), \\ \int_{SO(n)} |t_{l,p}^k(\tau)|^2 d\tau = 1/d(n, k), \end{cases} \quad (3)$$

где $d\tau$ – мера Хаара на $SO(n)$, нормированная соотношением

$$\int_{SO(n)} d\tau = 1$$

(см. [9, гл. 9]).

Пусть $\mathcal{O}$ – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что

$$\tau\mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \text{для любого} \quad \tau \in SO(n). \quad (4)$$

Как обычно, обозначим $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ – класс функций, локально суммируемых в $\mathcal{O}$. Ряд Фурье функции $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$ по сферическим гармоникам имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma), \quad x \in \mathcal{O}, \quad (5)$$

где

$$f_{k,j}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_j^k(\sigma)} d\omega(\sigma). \quad (6)$$

По теореме Фубини функции $f_{k,j}$ корректно определены для почти всех $\rho \in \{r > 0 : S_r \subset \mathcal{O}\}$, где $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Для таких ρ имеет место оценка

$$|f_{k,j}(\rho)| \leq \gamma \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(\rho\sigma)| d\omega(\sigma) \quad (7)$$

с постоянной $\gamma > 0$, не зависящей от f . Кроме того, функции

$$f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma)$$

принадлежат $L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$. Если $n = 2$, из (6) получаем, что

$$f^{k,j}(x) = \int_{SO(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{j,j}^k(\tau)} d\tau. \quad (8)$$

Пусть $n \geq 3$. Полагая

$$f_{k,l,p}(x) = f_{k,l}(\rho)Y_p^k(\sigma),$$

для $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ получаем

$$\begin{aligned} f(\tau^{-1}x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,k)} f_{k,l}(\rho)T^k(\tau)Y_l^k(\sigma) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,k)} f_{k,l}(\rho)Y_p^k(\sigma)t_{l,p}^k(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3) следует соотношение

$$f_{k,l,p}(x) = d(n,k) \int_{SO(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,p}^k(\tau)} d\tau \quad (9)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $l, p \in \{1, \dots, d(n,k)\}$. Поскольку для каждого компактного множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$, удовлетворяющего условию (4) пространство $L^2(\mathcal{U})$ плотно в $L(\mathcal{U})$, из (6) вытекает, что равенство (9) справедливо для любой функции $f \in L^{1,\text{loc}}(\mathcal{O})$.

Если $f \in C^2(\mathcal{O})$, то для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n,k)\}$ выполнено соотношение

$$(\Delta f)_{k,j}(\rho) = f''_{k,j}(\rho) + \frac{n-1}{\rho} f_{k,j}(\rho) - \frac{k(n+k-2)}{\rho^2} f_{k,j}(\rho), \quad (10)$$

где Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$ (см. [6, часть 1, формула (5.20)]).

Отображение $f \rightarrow f^{k,j}$ и разложение (5) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle f^{k,j}, \psi \rangle &= \left\langle f, d(n,k) \int_{SO(n)} \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^k(\tau) d\tau \right\rangle = \\ &= \left\langle f, \overline{(\psi)_{k,j}(\rho)} \overline{Y_j^k(\sigma)} \right\rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{O}), \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j} \quad (12)$$

(см. [6, часть 1, раздел 5.2]). Отметим, что для любого $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно, $f \in C^\infty(\mathcal{O})$) ряд в правой части (12) сходится к f в $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ (соответственно $C^\infty(\mathcal{O})$).

Для всякого множества $\mathfrak{W}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{O})$ положим

$$\mathfrak{W}_{k,j}(\mathcal{O}) = \left\{ f \in \mathfrak{W}(\mathcal{O}) : f = f^{k,j} \right\}.$$

Отметим, что $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$ совпадает с множеством радиальных распределений из $\mathfrak{W}(\mathcal{O})$. В дальнейшем мы пишем $\mathfrak{W}_{\mathfrak{h}}(\mathcal{O})$ вместо $\mathfrak{W}_{0,1}(\mathcal{O})$.

Пусть $R \in (0, +\infty]$. Для любого класса $\mathfrak{W}(-R, R)$ распределений на интервале $(-R, R) \subset \mathbb{R}^1$ символом $\mathfrak{W}_{\mathfrak{h}}(-R, R)$ обозначается множество всех четных распределений из $\mathfrak{W}(-R, R)$.

Если $T \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(\mathbb{R}^n)$, $r(T) < R \leq +\infty$ и $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, то из (11) следует, что

$$(f * T)^{k,j} = f^{k,j} * T \quad \text{в} \quad B_{R-r(T)}.$$

3. Обобщенное сферическое преобразование. Символом J_ν обозначим функцию Бесселя первого рода с индексом ν . Из асимптотических разложений бесселевых функций следует, что при $\nu \geq 0$ и всех достаточно больших по модулю $z \in \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \geq 0\}$ имеет место оценка

$$|J_\nu(z)| < \gamma_1 e^{|\operatorname{Im} z|} |z|^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

с постоянной $\gamma_1 > 0$, не зависящей от z .

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{Z}_+$ определим

$$\Phi_{\lambda,\eta,k,j}(x) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} Y_j^k(x) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\varkappa \left(\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}(z|x|)}{(z|x|)^{n/2+k-1}} \right) \Big|_{z=\lambda}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

где

$$\varkappa = \eta, \quad \text{если} \quad \lambda \neq 0 \quad \text{и} \quad \varkappa = 2\eta, \quad \text{если} \quad \lambda = 0. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что

$$(\Delta + \lambda^2)^{\eta+1} \Phi_{\lambda,\eta,k,j} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \quad (16)$$

(см. [6, часть 1, раздел 5.3]).

Далее нас будут в основном интересовать свойства функций $\Phi_{\lambda,0,k,j}$, которые, согласно (16), являются собственными функциями оператора Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Из (14), (15) и интегрального представления Пуассона для функций Бесселя находим

$$\Phi_{\lambda,0,k,j}(x) = \frac{2^{1-k} \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n-1}{2} + k)} Y_j^k(x) \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}+k} \cos(\lambda|x|t) dt.$$

Далее, если $N \in \mathbb{Z}_+$, $R \in (0, +\infty)$, то

$$\|\Phi_{\lambda,0,k,j}\|_{C^N(\dot{B}_R)} \leq c(1+|\lambda|)^{N-k} e^{R|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad (17)$$

где константа $c > 0$ не зависит от λ, R (см. [6, часть 1, формула (5.30)]).

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$. Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ введем обобщенное сферическое преобразование $\mathcal{F}_j^k(f)$ по формуле

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \langle f, \overline{\Phi_{\bar{z},0,k,j}} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $k = 0$, то $j = 1$ и функция $\tilde{f}(z) = \mathcal{F}_1^0(f)(z)$, $z \in \mathbb{C}$ называется сферическим преобразованием распределения $f \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n)$. Из определения следует, что обобщенное сферическое преобразование является четной целой функцией переменного $z \in \mathbb{C}$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\Phi_{\lambda,0,k,j} * T = \tilde{T}(\lambda) \Phi_{\lambda,0,k,j}$$

по теореме о среднем для собственных функций оператора Δ (см. (16)). Отсюда получаем

$$\mathcal{F}_j^k(f * T) = \mathcal{F}_j^k(f) \tilde{T} \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n), \quad T \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R}^n). \quad (18)$$

В частности,

$$\mathcal{F}_j^k(p(\Delta)f)(z) = p(-z^2) \mathcal{F}_j^k(f)(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

для любого многочлена p . Отметим также, что

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{2\pi^{n/2}}{i^k \Gamma(n/2) \sqrt{\omega_{n-1}}} Y_j^k(\zeta) \mathcal{F}_j^k(f) \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n \quad (19)$$

(см. [6, часть 1, раздел 6.2]).

Следующий результат уточняет теорему 3.1, полученную в работе [2] (см. также [4, гл. 9]).

Теорема 1.

(i) Если $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_1 (1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (20)$$

где $\gamma_2 = \operatorname{ord} f - k$ и $\gamma_1 > 0$ не зависит от z .

(ii) Если $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$, то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_2 (1 + |z|)^{-k - \frac{n-1}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная $\gamma_2 > 0$ не зависит от z и f .

(iii) Если $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^{2m})(\mathbb{R}^n)$ при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$, то

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_3 (1 + |z|)^{-2m-k-\frac{n-1}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \|\Delta^m f\|_{C(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная $\gamma_3 > 0$ не зависит от z и f .

(iv) Если $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^{2m-1})(\mathbb{R}^n)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, то для любого $l \in \{1, \dots, n\}$ имеет место оценка

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| \leq \gamma_4 (1 + |z|)^{-2m-k-\frac{n-3}{2}} e^{r(f)|\operatorname{Im} z|} \sum_{l=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \Delta^{m-1} f \right\|_{C(\mathbb{R}^n)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где постоянная $\gamma_4 > 0$ не зависит от z и f .

Доказательство. Обозначим $K = \operatorname{supp} f$ и $q = \operatorname{ord} f$. Для $\delta > 0$ положим $K_\delta = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in K, |y| \leq \delta\}$. Как известно (см. [10, формула (1.4.2)]), существует функция $\chi_\delta \in \mathcal{D}(K_\delta)$ такая, что $\chi_\delta = 1$ на $K_{\delta/2}$ и $|D^\alpha \chi_\delta| < C\delta^{-|\alpha|}$, где $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и постоянная C не зависит от δ . Далее имеем

$$|\mathcal{F}_j^k(f)(z)| = |\langle f, \chi_\delta \overline{\Phi_{z,0,k,j}} \rangle| \leq c_1 \sum_{|\alpha| \leq q} \sup |D^\alpha (\chi_\delta \overline{\Phi_{z,0,k,j}})|.$$

Используя (17) и формулу Лейбница, получаем, что последнее выражение не превосходит

$$c_2 e^{(r(f)+\delta)|\operatorname{Im} z|} \sum_{|\alpha| \leq q} \delta^{-|\alpha|} (1 + |z|)^{q-k-|\alpha|}.$$

Полагая $\delta = 1/(1 + |z|)$, отсюда получаем (i).

Докажем (ii). Согласно (14), имеем

$$\mathcal{F}_j^k(f)(z) = 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \int_K f(x) \overline{Y_j^k(x)} \frac{\overline{J_\nu(\overline{z}|x|)}}{(z|x|)^\nu} dx,$$

где $\nu = \frac{n}{2} + k - 1$. Переходя в последнем интеграле к полярным координатам и используя (6), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j^k(f)(z) &= 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \overline{Y_j^k(\sigma)} \int_0^{r(f)} \rho^{\frac{n}{2}} f(\rho\sigma) \overline{J_\nu(\overline{z}\rho)} d\rho d\omega(\sigma) z^{1-\frac{n}{2}-k} = \\ &= 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\omega_{n-1}} \left(\int_0^{r(f)} \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,j}(\rho) \overline{J_\nu(\overline{z}\rho)} d\rho \right) z^{1-\frac{n}{2}-k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что число $|z|$ является достаточно большим. Полагая

$$A = \left| \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|, \quad (22)$$

имеем

$$A \leq \left| \int_0^{R/\sqrt{|z|}} \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| + \left| \int_{R/\sqrt{|z|}}^R \rho^{\frac{n}{2}} f_{k,l}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|. \quad (23)$$

Используя оценку (7), получаем

$$|f_{k,l}(\rho)| \leq \gamma_1 \|f\|_{L^\infty(B_R)}, \quad \rho \in (0, R) \quad (24)$$

где $\gamma_1 > 0$ не зависит от f и ρ . Кроме того, при больших $|z|$ и $R/\sqrt{|z|} \leq \rho \leq R$ из (13) имеем

$$|J_\nu(z\rho)| \leq \gamma_2 \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{(1+|z|)\rho}}. \quad (25)$$

Из оценок (13), (23), (24) и (25) находим

$$A \leq \gamma_3 \|f\|_{L^\infty(B_R)} e^{R|\operatorname{Im} z|} \int_0^{R/\sqrt{|z|}} \rho^{\frac{n}{2}} d\rho + \gamma_4 \|f\|_{L^\infty(B_R)} \frac{e^{R|\operatorname{Im} z|}}{\sqrt{1+|z|}} \int_{R/\sqrt{|z|}}^R \rho^{\frac{n-1}{2}} d\rho, \quad (26)$$

где постоянные $\gamma_3, \gamma_4 > 0$ не зависят от z и f . Из последнего неравенства и (21) получаем утверждение (ii).

Далее, используя (22), с помощью интегрирования по частям, соотношения (10) и формул дифференцирования функций Бесселя [6, часть 1, гл. 4] при $z \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{z} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left(f'_{k,j}(\rho) - k \frac{f_{k,j}(\rho)}{\rho} \right) J_{\nu+1}(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^2} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left(f''_{k,j}(\rho) + (n-1) \frac{f'_{k,j}(\rho)}{\rho} - k(n+k-2) \frac{f_{k,j}(\rho)}{\rho^2} \right) J_\nu(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^2} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|. \end{aligned}$$

Повторяя этот процесс m раз, приходим к равенству

$$A = \left| \frac{1}{z^{2m}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta^m f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right|.$$

Как и выше, отсюда и из (21) получаем утверждение (iii).

Повторяя рассуждения из доказательства (iii), при $z \neq 0$ имеем равенства

$$\begin{aligned} A &= \left| \frac{1}{z^{2m-2}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) J_\nu(z\rho) d\rho \right| = \\ &= \left| \frac{1}{z^{2m-1}} \int_0^R \rho^{\frac{n}{2}} \left((\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) \right) J_{\nu+1}(z\rho) d\rho \right|. \quad (27) \end{aligned}$$

Далее, для $l \in \{1, \dots, n\}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \left((\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) &= \rho^{-1} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) V(\sigma) + \\ &+ \left((\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) \right) \sigma_l Y_j^k(\sigma), \end{aligned}$$

где $V(\sigma) = 0$ при $k = 0$ и $V(\sigma) = \rho^{1-k} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(Y_j^k(x) \right)$ при $k \geq 1$. Если $k = 0$, то, очевидно, $\sigma_l Y_j^k(\sigma) \in \mathcal{H}^{n,1}$. В случае $k \geq 1$ получаем, что $\sigma_l Y_j^k(\sigma) = V_1(\sigma) + V_2(\sigma)$, где $V_1 \in \mathcal{H}^{n,k-1}$, $V_2 \in \mathcal{H}^{n,k+1}$ (см. [8, гл. 4]). Разлагая V_2 по базису в пространстве $\mathcal{H}^{n,k+1}$, приходим к выводу, что существует $p = p(l) \in \{1, \dots, d(n, k+1)\}$ такое, что при $\rho \in (0, R)$

$$\begin{aligned} & (\Delta^{m-1} f)'_{k,j}(\rho) - \frac{k}{\rho} (\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) = \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \left((\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right)_{k+1,p}(\rho). \end{aligned} \quad (28)$$

Используя теперь оценку (24) находим, что при таких ρ

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_l} \left((\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right| \leq \gamma_1 \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \left((\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right\|_{C(\dot{B}_R)},$$

где $\gamma_1 > 0$ не зависит от f и ρ . Из этой оценки и равенств (8) и (9) заключаем, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_l} \left((\Delta^{m-1} f)_{k,j}(\rho) Y_j^k(\sigma) \right) \right\|_{C(\dot{B}_R)} \leq \gamma_2 \sum_{l=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_l} (\Delta^{m-1} f) \right\|_{C(\dot{B}_R)},$$

где $\gamma_2 > 0$ не зависит от f . Применяя (26), отсюда, из (21), (28) и второго равенства в (27), получаем утверждение (iv). $\square$

Следующая теорема уточняет соответствующий результат из работы [8].

Теорема 2. Пусть w – четная целая функция, удовлетворяющая условию

$$|w(z)| \leq \gamma_1 (1 + |z|)^{\gamma_2} e^{R|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (29)$$

где постоянные $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$ не зависят от z . Тогда существует и единственно распределение $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\mathcal{F}_j^k(f) = w$. Кроме того, $r(f) \leq R$ и

$$\operatorname{ord} f \leq \max \{0, \gamma_2 + k + n/2 + 1\}. \quad (30)$$

Доказательство. Пусть $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. По неравенству Шварца

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right|^2 \leq \sum_{m=1}^n (\operatorname{Im} \zeta_m)^2. \quad (31)$$

Из условий (29), (31) и [10, теорема 7.3.1] следует, что существует и единственно распределение $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что

$$\widehat{f}(\zeta) = w \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) Y_j^k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Кроме того, $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и $r(f) \leq R$ (см. (19), (29) и [2, теорема 3.1(ii)]). Докажем оценку (30). Сначала рассмотрим случай, когда $\text{supp } f = \{0\}$. В этом случае $f = p\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \delta_0$, где p – многочлен и δ_0 – дельта-функция Дирака, сосредоточенная в нуле (см. [4, следствие 6.2(iii)]). Тогда степень многочлена p равна порядку распределения f и не превосходит величины $\gamma_2 + k$ согласно формуле (19). Поэтому оценка (30) для данного случая очевидна и далее можно считать, что существует $x_0 \in (\text{supp } f) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Отметим, что если $2(\gamma_2 + k) + n < 0$, то согласно формуле (19) и оценке (29) распределение f принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$ и оценка (30) выполнена. Поэтому далее будем предполагать, что $2(\gamma_2 + k) + n > 0$. Положим $d = 1 + \left[\frac{1}{2}(\gamma_2 + k + \frac{n}{2})\right]$, тогда $d \in \mathbb{N}$. Докажем, что при сделанных предположениях целая функция w имеет бесконечно много нулей. Действительно, в противном случае из оценки (29) и теоремы Адамара о факторизации (см. [6, гл. 1.2]) следует, что $w(z) = e^{\alpha z} q(z)$ для некоторого многочлена q и некоторого $\alpha \in \mathbb{C}$. В силу четности w отсюда заключаем, что w является четным многочленом, а это противоречит предположению относительно носителя f (см. [4, следствие 6.2(iii)]). Следовательно, существует многочлен p степени d такой, что функция $w(z)/p(-z^2)$ является целой. Это означает, что уравнение $p(\Delta)F = f$ имеет решение $F \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и при этом $\mathcal{F}_j^k(f)(z) = \mathcal{F}_j^k(F)(z)p(-z^2)$. Из определения d и условия (29) получаем, что $F \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. (19)) и тогда $\text{ord } f \leq 2d$. $\square$

Теорема 3. Пусть w – четная целая функция, удовлетворяющая (29) и пусть $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\mathcal{F}_j^k(f) = w$. Тогда, если $\gamma_2 < -n - k - l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_+$, то $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^l)(\mathbb{R}^n)$ и

$$f(x) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-1} \Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \Phi_{\lambda,0,k,j}(x) \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) d\lambda. \quad (32)$$

Доказательство. Пусть $\gamma_2 < -n - k$, тогда $\widehat{f} \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$ согласно (20) и (19). Поэтому $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и выполнена формула обращения

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta = \\ &= \frac{2^{n-1}}{i^k \pi^{n/2} \Gamma(n/2) \omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_j^k(f) \left(\sqrt{\zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2} \right) Y_j^k(\zeta) e^{i(x,\zeta)} d\zeta. \end{aligned} \quad (33)$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам, получаем, что он равен

$$\int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i(x,\lambda\sigma)} Y_j^k(\sigma) d\omega(\sigma) d\lambda.$$

Используя формулу Бохнера (см. [6, формула (1.5.29)]), отсюда и из (33) имеем формулу (32). $\square$

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ положим

$$\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)) = \{f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) : \overline{f} \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Пусть $T \in \text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$. Согласно теореме Пэли–Винера–Шварца для одномерного преобразования Фурье и теореме 1(i) существует и единственно распределение $\Lambda^{k,j}(T) \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^1)$ такое, что

$$\widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(z) = \overline{\mathcal{F}_j^k(\overline{T})(\overline{z})} = \langle T, \Phi_{z,0,k,j} \rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

Более того, отображение $\Lambda^{k,j} : T \rightarrow \Lambda^{k,j}(T)$ является биекцией между пространствами $\text{conj}(\mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n))$ и $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^1)$. Рассмотрим основные свойства $\Lambda^{k,j}$.

Теорема 4. *Выполнены следующие утверждения.*

- (i) $\text{ord } \Lambda^{k,j}(T) \leq \max\{0, \text{ord } T - k + 1\}$ и $r(\Lambda^{k,j}(T)) = r(T)$.
- (ii) Если $\text{ord } T < k - 1 - l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_+$, то $\Lambda^{k,j}(T) \in C_b^l(\mathbb{R}^1)$.
- (iii) Если $T \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^m)(\mathbb{R}^n)$ при некотором $m \in \mathbb{Z}_+$ и $m + k + \frac{n-1}{2} > 1$, то $\Lambda^{k,j}(T) \in C_b^l(\mathbb{R}^1)$ при $l = m + k - 1 + [\frac{n-1}{2}]$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из теоремы 1(i) и [4, теорема 6.3]. Далее, из теоремы 1(i) следует, что оценка (20) выполнена при $\gamma_2 = \text{ord } T - k$. Отсюда и из (34) получаем, что

$$|\widehat{\Lambda^{k,j}(T)}(z)| \leq \gamma_1(1 + |z|)^{\gamma_2} e^{r(T)|\text{Im } z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (35)$$

При условиях утверждения (ii) имеем $\gamma_2 = -l - 1$ и утверждение (ii) следует из оценки (35). Утверждение (iii) доказывается аналогично, нужно лишь использовать второе утверждение теоремы 1. $\square$

Всюду в дальнейшем отображение $\Lambda^{0,1} : \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^1)$ будет обозначаться символом Λ .

4. Трансмутационные отображения. В этом разделе мы определим и изучим трансмутационные операторы $\mathfrak{A}_{k,j} : \mathcal{D}'_{k,j}(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'_b(-R, R)$, которые позволяют свести решение ряда проблем, связанных с оператором свертки в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, к одномерному случаю.

Для $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ положим

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \int_{\mathbb{R}^1} \psi(t) \cos(\lambda t) dt d\lambda. \quad (36)$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^1)$. Рассмотрим основные свойства отображения $f \rightarrow \mathfrak{A}_{k,j}(f)$.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$. Учитывая соотношение

$$\widehat{\Lambda(T)} = \widetilde{T},$$

которое является следствием (34), и используя (18) и (36), получаем обобщенное трансмутационное свойство

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f * T) = \mathfrak{A}_{k,j}(f) * \Lambda(T), \quad (37)$$

выполненное для любых $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 1. Пусть $m = N + k + \left[\frac{n+3}{2}\right]$ при некотором $N \in \mathbb{Z}$. Тогда, если $f \in (\mathcal{E}'_{k,j} \cap C^m)(\mathbb{R}^n)$, то $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$ и

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f)(t) = \frac{(\omega_{n-1})^{-1}}{2^{n-2}\Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda. \quad (38)$$

Доказательство. По теореме 1 (ii) имеем

$$\lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f)(\lambda) = O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}+k-m}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (39)$$

Далее, из определения m следует, что

$$\frac{n-1}{2} + k - m = -N - 2 + \frac{n-1}{2} - \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq -N - \frac{3}{2}.$$

Отсюда, из (39) и (36) получаем, что $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in C_{\natural}^N(\mathbb{R}^1)$ и выполнено равенство (38). $\square$

Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{E}'_{k,j}(\mathbb{R}^n)$, $r \in (0, +\infty]$. Тогда $f = 0$ на B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.

Доказательство этой леммы содержится в работе [1].

ЗАМЕЧАНИЕ. Положив в (37) $T = \Delta^\nu \delta_0$, находим

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Delta^\nu f) = (\mathfrak{A}_{k,j}(f))^{(2\nu)}.$$

Таким образом, оператор $\mathfrak{A}_{k,j}$ обладает трансмутационным свойством (см., например, [11, формула (2.31)]).

Утверждение леммы 2 позволяет продолжить $\mathfrak{A}_{k,j}$ на пространство $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $R \in (0, +\infty]$, по формуле

$$\langle \mathfrak{A}_{k,j}(f), \psi \rangle = \langle \mathfrak{A}_{k,j}(f\eta), \psi \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R), \psi \in \mathcal{D}(-R, R),$$

где $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ выбирается так, что $\eta = 1$ в $B_{r_0(\psi)+\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon \in (0, R - r_0(\psi))$. Тогда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) \in \mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$ и $\mathfrak{A}_{k,j}(f|_{B_r}) = \mathfrak{A}_{k,j}(f)|_{(-r,r)}$ для всех $r \in (0, R]$.

Теорема 5. При $R \in (0, +\infty]$ имеют место следующие утверждения.

- (i) Если $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $T \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R}^n)$ и $r(T) < R$, то (37) выполнено на интервале $(r(T) - R, R - r(T))$. В частности, для $\mathfrak{A}_{k,j}$ выполнено трансмутационное свойство (см. замечание).
- (ii) Пусть $f \in \mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$, $r \in (0, R]$. Тогда $f = 0$ в B_r в том и только том случае, когда $\mathfrak{A}_{k,j}(f) = 0$ на $(-r, r)$.
- (iii) Отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ устанавливает гомеоморфизм между пространствами $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$ и $\mathcal{D}'_{\natural}(-R, R)$, а также между пространствами $C_{k,j}^\infty(B_R)$ и $C_{\natural}^\infty(-R, R)$.

(iv) Если $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$, то

$$\mathfrak{A}_{k,j}(\Phi_{\lambda,\mu,k,j}) = u_{\lambda,\mu},$$

где

$$u_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left((it)^\mu e^{i\lambda t} + (-it)^\mu e^{-i\lambda t} \right), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ (-1)^\mu t^{2\mu}, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) следуют непосредственно из леммы 2 и определения оператора $\mathfrak{A}_{k,j}$ на пространстве $\mathcal{D}'_{k,j}(B_R)$. Доказательство утверждений (iii) и (iv) содержится, например, в [4]. $\square$

Теорема 6. Пусть $R \in (0, +\infty]$, $m = N + k + \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$, $N \in \mathbb{Z}_+$.

(i) Отображение $\mathfrak{A}_{k,j}$ непрерывно из $C^m_{k,j}(B_R)$ в $C^N_{\natural}(-R, R)$.

(ii) Если все производные функции $f \in C^m_{k,j}(B_R)$ порядка не выше m в точке $x = 0$ равны нулю, то

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f)^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0, \dots, N.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $f_q \in C^m_{k,j}(B_R)$, $q = 1, 2, \dots$, такую, что $f_q \rightarrow 0$ в $C^m(B_R)$. Зафиксируем $r \in (0, R)$ и выберем $\eta \in \mathcal{D}_{\natural}(B_R)$ такую, что $\eta = 1$ в $B_{r+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R - r)$. Используя лемму 1, имеем

$$\mathfrak{A}_{k,j}(f_q \eta)(t) = \frac{\omega_{n-1}^{-1}}{2^{n-2} \Gamma^2(n/2)} \int_0^\infty \lambda^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(\lambda) \cos(\lambda t) d\lambda$$

при любом $t \in \mathbb{R}^1$. Отсюда при $t \in [-r, r]$ и любом $\nu \in \{0, \dots, N\}$ находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{k,j}(f_q)^{(\nu)}(t) &= \mathfrak{A}_{k,j}(f_q \eta)^{(\nu)}(t) = \\ &= \frac{\omega_{n-1}^{-1}}{2^{n-1} \Gamma^2(n/2)} \int_{-\infty}^\infty |\lambda|^{n+2k-1} \mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(|\lambda|) (i\lambda)^\nu e^{i\lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (40)$$

Полагая $E = \text{supp } \eta$, из (40) получаем

$$\|\mathfrak{A}_{k,j}(\eta f_q)\|_{C^N([-r, r])} \leq c \int_{-\infty}^\infty (1 + |\lambda|)^{n+2k-1+N} \left| \mathcal{F}_j^k(f_q \eta)(|\lambda|) \right| d\lambda,$$

где $c > 0$ не зависит от q . Используя оценку (40), отсюда имеем

$$\|\mathfrak{A}_{k,j}(f_q)\|_{C^N([-r, r])} \leq c_1 \|\eta f_q\|_{C^m(E)},$$

где $c_1 > 0$ не зависит от q . Из последнего неравенства видно, что

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \|\mathfrak{A}_{k,j}(f_q)\|_{C^N([-r, r])} = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{A}_{k,j}(f_q) \rightarrow 0$ в $C^N(-R, R)$ и утверждение (i) доказано. Утверждение (ii) следует из (i) и теоремы 5(ii) с помощью [7, гл. 2, лемма 1.3]. $\square$

1. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Уравнения свертки на многомерных областях и редуцированной группе Гейзенберга // Мат. сборник. – 2008. – **199**, № 8. – С. 29–60.
2. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on the phase space associated to the Heisenberg group // J. Analyse Math. – 2008. – **105**. – Р. 43–124.
3. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Об одной проблеме Беренштейна–Гэя и ее обобщениях // Известия РАН. Сер. матем. – 2010. – **74**, № 4. – С. 33–62.
4. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer-Verlag, 2009. – 671 p.
5. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser., 2013. – 592 p.
6. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
7. Helgason S. Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735 p.
8. Стейн И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
9. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
10. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 340 с.
11. Koornwinder T.H. Special Functions: Group Theoretical Aspects and Applications. / R.A. Askey, T.H. Koornwinder, W. Schempp (Eds.). – Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1984. – Р. 1–85.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

Mappings with the generalized transmutation property.

We study transmutation operators related to eigenfunctions expansions of the Laplacian in Euclidean spaces. For these operators we investigate the generalized homomorphism property with respect to suitable convolution algebras, the transmutation property with respect to suitable differential operators, support properties as well the homeomorphism property with respect to suitable distribution spaces.

Keywords: *spherical means, Bessel functions, transmutation operators.*

Донецкий национальный ун-т
valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com

Получено 30.11.17

UDK 517.984.5

©2017. Ya. I. Granovskyi

TO THE SPECTRAL THEORY OF VECTOR-VALUED STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH SUMMABLE POTENTIALS

The paper is devoted to the spectral theory of vector-valued Sturm–Liouville operators on the half-line with a summable potential. It is shown that the positive spectrum is purely absolutely continuous and of constant multiplicity. The negative spectrum is either finite or discrete with the only accumulation point at zero. Our approach relies on the thorough investigation of the corresponding Weyl functions.

Keywords: *vector-valued Sturm–Liouville operator, spectrum, absolutely and singular continuous spectrum, eigenvalues, boundary triplets, Weyl function.*

1. Introduction. Differential operators with point interactions arise in various physical applications as exactly solvable models that describe complicated physical phenomena (numerous results as well as a comprehensive list of references may be found in [4, 6, 16]). An important class of such operators is formed by the differential operators with the coefficients having singular support on a disjoint set of points. The most known example is the operator $H_{X,\alpha,q}$ associated with the formal differential expression

$$\ell_{X,\alpha,q} := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) + \sum_{x_n \in X} \alpha_n \delta(x - x_n). \quad (1)$$

This operator describes a δ -interaction on a discrete set $X = \{x_n\}_{n \in I} \subset \mathbb{R}$, and the coefficients α_n are called the strengths of the interaction at the point $x = x_n$. Investigation of this model was originated by Kronig and Penney [25] and Grossmann et. al. [21] (see also [17]). In particular, the “Kronig–Penney model” ($\ell_{X,\alpha,q}$ with $X = \mathbb{Z}$, $\alpha_n \equiv \alpha$, and $q \equiv 0$) provides a simple model for a non-relativistic electron moving in a fixed crystal lattice.

There are several ways to associate an operator with the expression $\ell_{X,\alpha,q}$. In the following we will treat Hamiltonian (1) in the framework of extension theory of symmetric operators.

The minimal symmetric operator $H_{X,\alpha,q}$ is naturally associated with (1) in $L^2(\mathbb{R}_+)$. Namely, define the operator $H_{X,\alpha,q}^0$ by the differential expression

$$\ell_q := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad (2)$$

on the domain

$$\text{dom}(H_{X,\alpha,q}^0) = \left\{ f \in W_{\text{comp}}^{2,2}(\mathbb{R}_+ \setminus X) : \begin{array}{l} f(0) = 0, \quad f(x_n+) = f(x_n-) \\ f'(x_n+) - f'(x_n-) = \alpha_n f(x_n) \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Clearly, $H_{X,\alpha,q}^0$ is symmetric and hence admits a closure $H_{X,\alpha,q}$. In general, the operator $H_{X,\alpha,q}$ is symmetric but not automatically self-adjoint, even in the case $q \equiv 0$. Note that the Hamiltonian $H_q := H_{X,0,q}$ with $\alpha = \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 0$ is identified with the Dirichlet realization of the expression (2) in $L^2(\mathbb{R}_+)$. We set

$$d_* := \inf_n d_n \quad \text{and} \quad d^* := \sup_n d_n, \quad d_n := x_n - x_{n-1}, \quad x_0 := 0.$$

Numerous works are devoted to the spectral analysis of the operators $H_{X,\alpha,q}$ cf. monographs [4, 6] and the review papers [16, 10, 13, 23]. Spectral analysis of an operator means the characterization of continuous, absolute continuous and singular spectrum. In the following we are interested in the spectral analysis of Hamiltonians of type $H_{X,\alpha,q}$ for the vector-valued case. For the scalar case there only a few results in this direction known in the literature. Let us recall them.

Theorem 1.1. ([5, 22]). *Let $q(\cdot) = \overline{q(\cdot)} \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ and let $d^* < \infty$. Then $\sigma_{ac}(H_{X,\alpha,q}) = \sigma_{ac}(H_q)$ provided that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha_n|}{d_{n+1}} < \infty. \quad (4)$$

If in addition, $q \in L^1(\mathbb{R}_+)$, then $\sigma_{ac}(H_{X,\alpha,q}) = [0, \infty)$.

For $d_* > 0$ the result was established earlier by Mikhalets [27]. In this case condition (4) turns into $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. The proof in [5] is based on the boundary triplet approach to the extensions. Namely, it was shown that the resolvent difference $(H_{X,\alpha,q} - i)^{-1} - (H_{X,0,q} - i)^{-1}$ is a trace class operator. Then the result is implied by the Birman–Krein theorem generalizing the classical Kato–Rosenblum result (see [7, Theorem 16.1], [3, Section 99]).

However Theorem 1.1 does not ensure absence of a singular part $\sigma_s(H_{X,\alpha,q})$ of the spectrum $\sigma(H_{X,\alpha,q})$. It is well known that this problem requires a special analysis which cannot be extracted from the Kato–Rosenblum theorem. Moreover, to the best of our knowledge the pure absolute continuity of $H_{X,\alpha,q}$ was established only in a few cases, for instance by Crist and Stolz [29].

Theorem 1.2. ([29]). *Let $X = \mathbb{Z}$, i.e. $x_n = n$. Then the following holds:*

(i) *if $q(x) = 0$ and either $\sum_{n=-\infty}^0 |\alpha_n| < \infty$ or $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, then the positive part $E_{H_{\mathbb{Z},\alpha,0}}(\mathbb{R}_+)H_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ of $H_{\mathbb{Z},\alpha,0}$ is purely absolutely continuous, i.e.*

$$\sigma(H_{\mathbb{Z},\alpha,0}) \cap [0, +\infty) = \sigma_{ac}(H_{\mathbb{Z},\alpha,0}) = [0, +\infty) \quad \text{and} \quad \sigma_s(H_{\mathbb{Z},\alpha,0}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset;$$

(ii) *if $q(x) = x$ and $\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{|n|}} < \infty$, then*

$$\sigma(H_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \sigma_{ac}(H_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \sigma_s(H_{\mathbb{Z},\alpha,x}) = \emptyset.$$

To prove this result the authors generalized the method of subordinacy originated and developed by D. Gilbert and D. Pearson [18, 19] (see also [30]).

The main object of our paper is vector-valued Sturm–Liouville differential expression with a summable matrix potential $Q(\cdot) = Q^*(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$

$$\mathcal{L}_Q := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x). \quad (5)$$

Note that the Hamiltonian H_Q is identified with the Dirichlet realization of the expression (5) considered in $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m)$. The main result of the paper consists in a complete spectral analysis of the Hamiltonian H_Q and reads as follows.

Theorem 1.3. *The operator H_Q is semi-bounded from below and its negative spectrum is either finite or discrete with the only accumulation point at zero. Its non-negative part is purely absolutely continuous, $H_Q^{\text{ac}} = H_Q E_{H_Q}(\mathbb{R}_+)$ and $N_{H_Q^{\text{ac}}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. In particular, $\sigma_{\text{ac}}(H_Q) = [0, \infty)$, $\sigma_{\text{sc}}(H_Q) = \sigma_{\text{pp}}(H_Q) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, and $\sigma_{\text{pp}}(H_Q) \cap \mathbb{R}_- \subseteq \Lambda_1 \cap \mathbb{R}_-$.*

2. Preliminaries.

2.1. Boundary triplets and Weyl functions. Let us recall some basic facts of the theory of abstract boundary triplets and the corresponding Weyl functions, cf. [14, 15, 20].

The set $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of closed linear relations in $\mathcal{H}$ is the set of closed linear subspaces of $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Recall that $\text{dom}(\Theta) = \{f : \{f, f'\} \in \Theta\}$, $\text{ran}(\Theta) = \{f' : \{f, f'\} \in \Theta\}$, and $\text{mul}(\Theta) = \{f' : \{0, f'\} \in \Theta\}$ are the domain, the range, and the multivalued part of Θ . A closed linear operator A in $\mathcal{H}$ is identified with its graph $\text{gr}(A)$, so that the set $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ of closed linear operators in $\mathcal{H}$ is viewed as a subset of $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. In particular, a linear relation Θ is an operator if and only if $\text{mul}(\Theta)$ is trivial. We recall that the adjoint relation $\Theta^* \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ of $\Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ is defined by

$$\Theta^* = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h' \end{pmatrix} : (f', h)_{\mathcal{H}} = (f, h')_{\mathcal{H}} \text{ for all } \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} \in \Theta \right\}.$$

A linear relation Θ is said to be *symmetric* if $\Theta \subset \Theta^*$ and self-adjoint if $\Theta = \Theta^*$.

For a symmetric linear relation $\Theta \subseteq \Theta^*$ in $\mathcal{H}$ the multivalued part $\text{mul}(\Theta)$ is the orthogonal complement of $\text{dom}(\Theta)$ in $\mathcal{H}$. Therefore setting $\mathcal{H}_{\text{op}} := \overline{\text{dom}(\Theta)}$ and $\mathcal{H}_{\infty} = \text{mul}(\Theta)$, one arrives at the orthogonal decomposition $\Theta = \Theta_{\text{op}} \oplus \Theta_{\infty}$ where Θ_{op} is a symmetric operator in $\mathcal{H}_{\text{op}}$, the operator part of Θ , and $\Theta_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix} : f' \in \text{mul}(\Theta) \right\}$, a “pure” linear relation in $\mathcal{H}_{\infty}$.

Let A be a densely defined closed symmetric operator in a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices $n_{\pm}(A) = \dim(\mathfrak{N}_{\pm i}) \leq \infty$, where $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - z)$ is the defect subspace.

DEFINITION 2.1. ([20]). A triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ is called a *boundary triplet* for the adjoint operator A^* if $\mathcal{H}$ is an auxiliary Hilbert space and $\Gamma_0, \Gamma_1 : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}$ are linear mappings such that the abstract Green identity

$$(A^*f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^*g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \text{dom}(A^*),$$

holds and the mapping $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \text{dom}(A^*) \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ is surjective.

First, note that a boundary triplet for A^* exists whenever the deficiency indices of A are equal, $n_+(A) = n_-(A)$. Moreover, $n_\pm(A) = \dim(\mathcal{H})$ and

$$\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \text{dom}(A).$$

Note also that Γ is a bounded mapping from $\mathfrak{H}_+ = \text{dom}(A^*)$ equipped with the graph norm to $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

A boundary triplet for A^* is not unique. Moreover, for any self-adjoint extension $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ of A there exists a boundary triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ such that $\ker(\Gamma_0) = \text{dom}(\tilde{A})$.

DEFINITION 2.2. (i) A closed extension A' of A is called a *proper extension*, if $A \subset A' \subset A^*$. The set of all proper extensions of A completed by the (non-proper) extensions A and A^* is denoted by Ext_A .

(ii) Two proper extensions A', A'' of A are called *disjoint* if

$$\text{dom}(A') \cap \text{dom}(A'') = \text{dom}(A)$$

and *transversal* if in addition

$$\text{dom}(A') + \text{dom}(A'') = \text{dom}(A^*).$$

Any self-adjoint extension $\tilde{A}$ of A is proper, i.e. $\tilde{A} \in \text{Ext}_A$. Fixing a boundary triplet Π one can parametrize the set Ext_A in the following way.

PROPOSITION 2.3. ([15]). *Let A be as above and let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* . Then the mapping*

$$\text{Ext}_A \ni \tilde{A} \rightarrow \Gamma \text{dom}(\tilde{A}) = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : f \in \text{dom}(\tilde{A})\} =: \Theta \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H}) \quad (6)$$

establishes a bijective correspondence between the sets Ext_A and $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$. We put $A_\Theta := \tilde{A}$ where Θ is defined by (6), i.e.

$$A_\Theta := A^* \upharpoonright \Gamma^{-1}\Theta = A^* \upharpoonright \{f \in \text{dom}(A^*) : \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta\}.$$

(i) A_Θ is symmetric if and only if Θ is symmetric, i.e. $\Theta \subseteq \Theta^*$. In particular, A_Θ is self-adjoint if and only if Θ is self-adjoint, i.e. $\Theta = \Theta^*$. Moreover, $n_\pm(A_\Theta) = n_\pm(\Theta)$.

(ii) The extensions A_Θ and A_0 are disjoint (transversal) if and only if Θ is an operator. In this case A_Θ is given by

$$A_\Theta = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - \Theta \Gamma_0). \quad (7)$$

Moreover, the extensions A_Θ and A_0 are transversal if and only if $\Theta \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

The linear relation Θ (the operator B) in the correspondence (6) (resp. (7)) is called *the boundary relation (the boundary operator)*. We emphasize that for differential

operators in contrast to the von Neumann extension theory the parametrization (6)–(7) describes the set of proper extensions directly in terms of boundary conditions.

It follows immediately from Proposition 2.3 that the extensions

$$A_0 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0) \quad \text{and} \quad A_1 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1)$$

are self-adjoint. Clearly, $A_j = A_{\Theta_j}$, $j \in \{0, 1\}$, where the subspaces $\Theta_0 := \{0\} \times \mathcal{H}$ and $\Theta_1 := \mathcal{H} \times \{0\}$ are self-adjoint relations in $\mathcal{H}$. Note that Θ_0 is a “pure” linear relation.

In [14, 15] the concept of the classical Weyl–Titchmarsh m -function from the theory of Sturm–Liouville operators was generalized to the case of symmetric operators with equal deficiency indices. The role of abstract Weyl functions in the extension theory is similar to that of the classical Weyl–Titchmarsh m -function in the spectral theory of singular Sturm–Liouville operators.

DEFINITION 2.4. ([14]). Let A be a densely defined closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$ with equal deficiency indices and let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* . The operator valued functions $\gamma(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ and $M(\cdot) : \rho(A_0) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ defined by

$$\gamma(z) := (\Gamma_0 \upharpoonright \mathfrak{N}_z)^{-1} \quad \text{and} \quad M(z) := \Gamma_1 \gamma(z), \quad z \in \rho(A_0), \quad (8)$$

are called the γ -field and the Weyl function, respectively, corresponding to the boundary triplet Π .

The γ -field $\gamma(\cdot)$ and the Weyl function $M(\cdot)$ in (8) are well defined. Moreover, both $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are holomorphic on $\rho(A_0)$ and the following relations hold (see [14])

$$\gamma(z) = (I + (z - \zeta)(A_0 - z)^{-1})\gamma(\zeta), \quad z, \zeta \in \rho(A_0), \quad (9)$$

$$M(z) - M(\zeta)^* = (z - \bar{\zeta})\gamma(\zeta)^*\gamma(z), \quad z, \zeta \in \rho(A_0). \quad (10)$$

Identities (9) and (10) mean that $\gamma(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are the γ -field and the Q -function of the operator A_0 , respectively, in the sense of M. Krein (see [24]). It follows from (10) that $M(\cdot)$ is an $R[\mathcal{H}]$ -function (or *Nevanlinna function*), i.e. $M(\cdot)$ is an $(\mathcal{B}(\mathcal{H})$ -valued) holomorphic function on $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ satisfying

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} M(z) \geq 0, \quad M(z)^* = M(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Moreover, due to (10) $M(\cdot) \in R^u[\mathcal{H}]$, i.e. it satisfies $0 \in \rho(\operatorname{Im} M(i))$.

It is well known that $M(\cdot)$ admits an integral representation (see, for instance, [2, 3])

$$M(z) = C_0 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\Sigma_M(t), \quad z \in \rho(A_0), \quad (11)$$

where $\Sigma_M(\cdot)$ is an operator-valued Borel measure on $\mathbb{R}$ satisfying the conditions $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\Sigma_M(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $C_0 = C_0^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. The integral in (11) is understood in the strong sense. Note that a linear term $C_1 z$ is missing in (11) since A is densely defined (see [14]).

PROPOSITION 2.5. Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ and $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ be two boundary triplets for the operator A^* , let $M(\cdot)$ and $\tilde{M}(\cdot)$ be the corresponding Weyl functions, and let $\tilde{A}_0 := A^* \upharpoonright \ker(\tilde{\Gamma}_0)$ and

$$J := i \begin{pmatrix} 0 & -I_{\mathcal{H}} \\ I_{\mathcal{H}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Then the following holds:

(i) there is $J_{\mathcal{H}}$ -unitary operator $X = (X_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, i.e. $X^* J X = J$, such that

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_1 \\ \tilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(ii) $0 \in \rho(X_{21}M(z) + X_{22})$ for $z \in \rho(\tilde{A}_0)$. The Weyl functions $\tilde{M}(\cdot)$ and $M(\cdot)$ are related by means of the linear fractional transformation

$$\tilde{M}(z) = X(M(z)) := (X_{11}M(z) + X_{12})(X_{21}M(z) + X_{22})^{-1}, \quad z \in \rho(\tilde{A}_0).$$

Recall that a symmetric operator A in $\mathfrak{H}$ is said to be *simple* if there is no non-trivial subspace which reduces it to a self-adjoint operator. In other words, A is simple if it does not admit an (orthogonal) decomposition $A = A' \oplus S$ where A' is a symmetric operator and S is a self-adjoint operator acting on a nontrivial Hilbert space. It is easily seen (and well-known) that A is simple if and only if the closed linear span of $\{\mathfrak{N}_z(A) : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$ coincides with $\mathfrak{H}$.

If A is simple, then the Weyl function $M(\cdot)$ determines the boundary triplet Π uniquely up to the unitary equivalence (see [14]). In particular, $M(\cdot)$ contains the full information about the spectral properties of A_0 . Moreover, the spectrum of a proper (not necessarily self-adjoint) extension $A_{\Theta} \in \text{Ext}_A$ can be described by means of $M(\cdot)$ and the boundary relation Θ .

PROPOSITION 2.6. ([14, Theorem 2.2]). Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* and let $M(\cdot)$ and $\gamma(\cdot)$ be the corresponding Weyl function and the γ -field. Then for any $\tilde{A} = A_{\Theta} \in \text{Ext}_A$ with $\rho(A_{\Theta}) \neq \emptyset$ the following Krein type formula holds:

$$(A_{\Theta} - z)^{-1} - (A_0 - z)^{-1} = \gamma(z)(\Theta - M(z))^{-1}\gamma^*(\bar{z}), \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_{\Theta}). \quad (13)$$

Moreover, if A is simple, then for any $z \in \rho(A_0)$

$$z \in \sigma_j(A_{\Theta}) \iff 0 \in \sigma_j(\Theta - M(z)), \quad j = \text{pp}, \text{c}.$$

Formula (13) is a generalization of the known Krein formula for canonical resolvents (cf. [3], [24]). It establishes a one-to-one correspondence between the set of proper extensions $\tilde{A} = A_{\Theta}$ with non-empty resolvent set and the set of linear relations Θ in $\mathcal{H}$. Note also that all quantities which enter into (13) are expressed in terms of the boundary triplet Π (see formulas (7) and (8)) (cf. [14, 15]).

2.2. Weyl function and spectrum. In the following we are going to characterize the spectrum of the extension A_0 in terms for the Weyl function. To this end let $\Phi(\cdot)$ be a scalar Nevanlinna function. Let $\Phi(z)$ be a holomorphic function in $\mathbb{C}_+$. In the following by $\lim_{z \rightarrow \succ x} \Phi(z)$ we mean that the limit $\lim_{r \downarrow 0} \Phi(x + re^{i\theta})$, $x \in \mathbb{R}$, exists uniformly in $\theta \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ for each $\varepsilon \in (0, \pi/2)$. Let us introduce the sets:

$$\begin{aligned}\Omega_s(\Phi) &:= \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \rightarrow +\infty \text{ as } z \rightarrow \succ x\}, \\ \Omega_{pp}(\Phi) &:= \{x \in \mathbb{R} : \lim_{z \rightarrow \succ x} (z - x)\Phi(z) \neq 0\}, \\ \Omega_{sc}(\Phi) &:= \{x \in \mathbb{R} : |\Phi(z)| \rightarrow +\infty \text{ and } (z - x)\Phi(z) \rightarrow 0 \text{ as } z \rightarrow \succ x\}, \\ \Omega_{ac}(\Phi) &:= \{x \in \mathbb{R} : 0 < \operatorname{Im} \Phi(x + i0) < +\infty\}, \quad \Phi(x + i0) = \lim_{y \downarrow 0} \Phi(x + iy).\end{aligned}$$

Any scalar R-function $\Phi(\cdot)$ admits the representation

$$\Phi(z) = C_0 + C_1 z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}_+, \quad (14)$$

where $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, $C_1 \geq 0$ and the Borel measure $\mu(\cdot)$ obeys

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{1 + t^2} < \infty.$$

The sets $\Omega_s(\Phi)$, $\Omega_{pp}(\Phi)$, $\Omega_{sc}(\Phi)$ and $\Omega_{ac}(\Phi)$ are mutually disjoint and, moreover, are singular, pure point, singular continuous and absolutely continuous supports of $\mu(\cdot)$, i.e.

$$\mu(\mathcal{X} \cap \Omega_\tau(\Phi)) = \mu_\tau(\mathcal{X}), \quad \tau = s, pp, sc, ac,$$

for any Borel set $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$. Let $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ be a Borel set. The set

$$\operatorname{cl}_{ac}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{mes}((x - \epsilon, x + \epsilon) \cap \mathcal{X}) > 0 \quad \forall \epsilon > 0\}$$

is called the *absolutely continuous closure* of the set $\mathcal{X}$. Obviously, the set $\operatorname{cl}_{ac}(\mathcal{X})$ is always closed and one has $\operatorname{cl}_{ac}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{\mathcal{X}}$. For the Borel measure μ we consider the Lebesgue–Jordan decomposition $\mu = \mu_s + \mu_{ac}$, where μ_s and μ_{ac} are the corresponding singular and absolutely continuous measures, respectively. The supports of the measures μ_s and μ_{ac} are denoted by $S_s(\mu)$ and $S_{ac}(\mu)$, respectively.

Lemma 2.7. ([9, Lemma 4.1]). *Let $\Phi(\cdot)$ be a scalar R-function which has the representation (14). Then $S_{ac}(\mu) = \operatorname{cl}_{ac}(\Omega_{ac}(\Phi))$.*

Let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triple of A^* with Weyl function $M(\cdot)$. We set

$$M_h(z) := (M(z)h, h), \quad z \in \mathbb{C}_\pm, \quad h \in \mathcal{H}, \quad h \neq 0.$$

Further, let $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^N$, $1 \leq N \leq \infty$, be a total set in $\mathcal{H}$. We set

$$\begin{aligned}\Omega_s(M; \mathcal{T}) &:= \cup_{k=1}^N \Omega_s(M_{h_k}), \\ \Omega_{pp}(M; \mathcal{T}) &:= \cup_{k=1}^N \Omega_{pp}(M_{h_k}), \\ \Omega_{sc}(M; \mathcal{T}) &:= \cup_{k=1}^N \Omega_{sc}(M_{h_k}) \setminus \Omega_{pp}(M; \mathcal{T}), \\ \Omega_{ac}(M; \mathcal{T}) &:= \cup_{k=1}^N \Omega_{ac}(M_{h_k}) \setminus \Omega_s(M; \mathcal{T}).\end{aligned}$$

Obviously, the sets $\Omega_s(M; \mathcal{T})$ and $\Omega_{ac}(M; \mathcal{T})$ as well as the sets $\Omega_{pp}(M; \mathcal{T})$, $\Omega_{sc}(M; \mathcal{T})$ and $\Omega_{ac}(M; \mathcal{T})$ are mutually disjoint. We note that the sets $\Omega_\tau(M; \mathcal{T})$, $\tau = s, pp, sc$, have Lebesgue measure zero, i.e. $\text{mes}(\Omega_\tau(M; \mathcal{T})) = 0$, $\tau = s, pp, sc$.

Theorem 2.8. ([9, Theorem 3.8]). *Let A be a simple densely defined closed symmetric operator on a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with $n_+(A) = n_-(A)$. Further, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet of A^* with Weyl function $M(\cdot)$ and let $E_{A_0}(\cdot)$ be the spectral measure of the self-adjoint extension A_0 of A .*

If $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^N$, $1 \leq N \leq +\infty$, is a total set in $\mathcal{H}$, then the sets $\Omega_s(M; \mathcal{T})$, $\Omega_{pp}(M; \mathcal{T})$, $\Omega_{sc}(M; \mathcal{T})$ and $\Omega_{ac}(M; \mathcal{T})$ are singular, pure point, singular continuous and absolutely continuous supports of $E_{A_0}(\cdot)$, respectively, i.e. we have

$$E_{A_0}(\mathcal{X} \cap \Omega_\tau(M; \mathcal{T})) = E_{A_0}^\tau(\mathcal{X}), \quad \tau = s, pp, sc, ac,$$

for each Borel set $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$. In particular, it holds $\sigma_{pp}(A_0) = \Omega_{pp}(M; \mathcal{T})$ and $\sigma_\tau(A_0) \subseteq \overline{\Omega_\tau(M; \mathcal{T})} \subseteq \sigma(A_0)$ for $\tau = s, sc, ac$.

PROPOSITION 2.9. ([9, Proposition 4.2]). *Let A be a simple densely defined closed symmetric operator on a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with $n_+(A) = n_-(A)$. Further, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet of A^* with Weyl function $M(\cdot)$.*

If $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^N$, $1 \leq N \leq +\infty$, is a total set in $\mathcal{H}$, then the absolutely continuous spectrum of the self-adjoint extension $A_0 := A^ \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$ of A is given by*

$$\sigma_{ac}(A_0) = \overline{\bigcup_{k=1}^N \text{cl}_{ac}(\Omega_{ac}(M_{h_k}))}.$$

Theorem 2.10. ([9, Theorem 4.3]). *Let A be a simple densely defined closed symmetric operator on a separable Hilbert space $\mathfrak{H}$ with $n_+(A) = n_-(A)$. Further, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triple of A^* with Weyl function $M(\cdot)$.*

If $\mathcal{T} = \{h_k\}_{k=1}^N$, $1 \leq N \leq +\infty$, is a total set in $\mathcal{H}$, then for the self-adjoint extension A_0 of A the following conclusions hold.

(i) *The self-adjoint extension A_0 of A has no point spectrum within the interval (a, b) , i.e. $\sigma_{pp}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, if and only if for each $k = 1, 2, \dots, N$ one has*

$$\lim_{y \downarrow 0} y M_{h_k}(x + iy) = 0$$

for all $x \in (a, b)$. In this case the following relation holds

$$\begin{aligned} \sigma(A_0) \cap (a, b) &= \sigma_c(A_0) \cap (a, b) \\ &= \left(\overline{\bigcup_{k=1}^N \Omega_{sc}(M_{h_k})} \cup \overline{\bigcup_{k=1}^N \Omega_{ac}(M_{h_k})} \right) \cap (a, b). \end{aligned}$$

(ii) *The self-adjoint extension A_0 of A has no singular continuous spectrum within the interval (a, b) , i.e. $\sigma_{sc}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, if for each $k = 1, 2, \dots, N$ the set $\Omega_{sc}(M_{h_k}) \cap (a, b)$ is countable, in particular, if $(a, b) \setminus \Omega_{ac}(M_{h_k})$ is countable.*

(iii) *The self-adjoint extension A_0 of A has no absolutely continuous spectrum within the interval (a, b) , i.e. $\sigma_{ac}(A_0) \cap (a, b) = \emptyset$, if and only if for each $k = 1, 2, \dots, N$ the condition*

$$\text{Im}(M_{h_k}(x + i0)) = 0$$

holds for a.e. $x \in (a, b)$. In this case we have

$$\sigma(A_0) \cap (a, b) = \sigma_s(A_0) \cap (a, b) = \overline{\Omega_s(M; \mathcal{T})} \cap (a, b).$$

2.3. Weyl function and spectral multiplicity. Let $E(\cdot)$ be an orthogonal operator-valued measure defined on the Borel sets $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ of $\mathbb{R}$. With the measure $E(\cdot)$ one associates a multiplicity function $N_E(\cdot)$ which is defined on $\mathbb{R}$, Borel measurable and takes values $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}$, cf. [8, Section 7.4]. The multiplicity function is important since together with the spectral type $\mathcal{B}(E)$, cf. [8, Section 7.3], it characterizes the measure $E(\cdot)$ up to unitary equivalence. Every measure $E(\cdot)$ admits a unique orthogonal decomposition $E(\cdot) = E^s(\cdot) \oplus E^{ac}(\cdot)$ into a singular orthogonal operator measure $E^s(\cdot)$ and an absolutely continuous orthogonal operator measure $E^{ac}(\cdot)$. An orthogonal operator measure $E(\cdot)$ is called *singular* if there is a Borel set δ_0 of Lebesgue measure zero such that $E(\delta) = E(\delta \cap \delta_0)$ for any Borel set δ . A measure $E(\cdot)$ is *absolutely continuous* if for any Borel set δ of Lebesgue measure zero one has $E(\delta) = 0$. Obviously, the measures $E^s(\cdot)$ and $E^{ac}(\cdot)$ admit also their multiplicity functions which are denoted by $N_{E^s}(\cdot)$ and $N_{E^{ac}}(\cdot)$. For a self-adjoint operator H we define the multiplicity function $N_H(\cdot)$ by $N_H(\lambda) := N_{E_H}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, where $E_H(\cdot)$ is the orthogonal spectral measure which corresponds to the self-adjoint operator H . The unique decomposition $E_H(\cdot) = E_H^s(\cdot) \oplus E_H^{ac}(\cdot)$ yields a decomposition of H into a singular part H^s and an absolutely continuous part H^{ac} such that $H = H^s \oplus H^{ac}$. We set

$$N_{H^s}(\lambda) := N_{E_H^s}(\lambda) \quad \text{and} \quad N_{H^{ac}}(\lambda) := N_{E_H^{ac}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Obviously we have $N_{H^s}(\lambda) = N_{E_{H^s}}(\lambda)$ and $N_{H^{ac}}(\lambda) = N_{E_{H^{ac}}}(\lambda)$ for $\lambda \in \mathbb{R}$.

In the following we are interested in the multiplicity function $N_{A_0^{ac}}(\cdot)$ of the self-adjoint extension $A_0 := A^* \ker(\Gamma_0)$. It turns out that $N_{A_0^{ac}}(\cdot)$ can be computed by using the Weyl function as follows: choosing $D \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ such that

$$\ker(D) = \ker(D^*) = \{0\}$$

we introduce the sandwiched Weyl function $M^D(\cdot)$,

$$(M^D)(z) := D^* M(z) D, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

It turns out that the limit

$$(M^D)(t) := s\text{-}\lim_{y \rightarrow +0} M^D(t + iy)$$

exists for a.e. $t \in \mathbb{R}$. We set

$$d_{M^D}(t) := \dim(\text{ran}(\text{Im}(M^D(t)))) ,$$

which is well-defined for a.e. $t \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.11. ([26, Proposition 3.2]). Let A be a simple densely defined closed symmetric operator, let $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ be a boundary triplet for A^* and let

$M(\cdot)$ be the corresponding Weyl function. Further, let $E_{A_0}(\cdot)$ be the spectral measure of $A_0 = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$. If $D \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ and satisfies $\ker(D) = \ker(D^*) = \{0\}$, then $N_{A_0^{\text{ac}}}(t) = d_{M^D}(t)$ for a.e. $t \in \mathbb{R}$ and $\sigma_{\text{ac}}(A_0) = \text{cl}_{\text{ac}}(\text{supp}(d_{M^D}))$ where $\text{supp}(d_{M^D}) := \{\lambda \in \mathbb{R} : d_{M^D}(\lambda) > 0\}$.

If, in addition, the limit $M(t) := \text{s-lim}_{y \rightarrow +0} M(t + iy)$ exists for a.e. $t \in \mathbb{R}$, then $N_{A_0^{\text{ac}}}(t) = d_M(t)$ for a.e. $t \in \mathbb{R}$ and $\sigma_{\text{ac}}(A_0) = \text{cl}_{\text{ac}}(\text{supp}(d_M))$.

3. Weyl function for matrix Sturm–Liouville operator with integrable potential matrix. Throughout this section we assume that $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Note that self-adjointness of a potential matrix $Q(\cdot)$ means that $Q(x) = Q(x)^*$ for a.e. $x \in \mathbb{R}_+$. Let us consider the Sturm–Liouville differential expression

$$\mathcal{L}_Q(f(x)) := -\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + Q(x)f(x), \quad f = (f_1, \dots, f_m)^T, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

In this section we investigate the structure of the Weyl function of the Dirichlet realization H_Q^D of $\mathcal{L}_Q$ as well as its limit representation. In particular, we show that the positive part of each realization $\tilde{H}_Q$ of $\mathcal{L}_Q$ is purely absolutely continuous. This fact is well known in the scalar case (see [31, Chapter 5.3]). Moreover, it is known in the matrix case whenever $|Q|$ has a finite first moment (see [1, Chapter 4.1]). In the later case each realization of $\mathcal{L}_Q$ including the Dirichlet realization H_Q^D has at most finitely many negative eigenvalues.

Note also that several papers are devoted to the spectral theory of vector-valued Sturm–Liouville operators. For instance, the high-energy asymptotics for Weyl–Titchmarsh matrices associated with general matrix-valued Schrödinger operators on a half-line was obtained in [11]. Several papers are also devoted to inverse problems. For instance, an extension of Borg’s classical result from the class of periodic scalar potentials to the class of reflectionless matrix-valued potentials was obtained in [12] (see also references in [12]).

3.1. Asymptotic representations of solutions and special identities. We are interested in matrix-valued solutions $Y(x, z)$ of the equation

$$\mathcal{L}_Q(Y(x, z)) = zY(x, z), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (15)$$

Let $C(x, z)$ and $S(x, z)$ be the matrix-valued solutions of the equation (15) satisfying the initial conditions

$$C(0, z) = S'(0, z) = I_m \quad \text{and} \quad S(0, z) = C'(0, z) = \mathbb{O}_m, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Lemma 3.1. *Let $Q(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$ such that $Q(x) = Q(x)^*$ for a.e. $x \in \mathbb{R}_+$. For any $z = \lambda \in \mathbb{R}_+$ the solutions $S(x, \lambda)$ and $C(x, \lambda)$ admit the representation*

$$S(x, \lambda) = a_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + a_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} o_m(1) \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$C(x, \lambda) = b_1(\lambda) \cos(x\sqrt{\lambda}) + b_2(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} o_m(1) \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (18)$$

where

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \sin(t\sqrt{\lambda}) Q(t) S(t, \lambda) dt, \\ a_2(\lambda) &= I_m + \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\lambda}) Q(t) S(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (19)$$

and

$$\begin{aligned} b_1(\lambda) &= I_m - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \sin(t\sqrt{\lambda}) Q(t) C(t, \lambda) dt, \\ b_2(\lambda) &= \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\lambda}) Q(t) C(t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

and $o_m(1)$ denotes an $m \times m$ matrix with entries $o(1)$.

Lemma 3.2. *Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Let $a_j(\cdot)$, $b_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, be the matrix functions given by (19) and (20). Then the following relations hold:*

$$a_1(\lambda) b_1(\lambda)^* = b_1(\lambda) a_1(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (21)$$

$$a_2(\lambda) b_2(\lambda)^* = b_2(\lambda) a_2(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (22)$$

$$a_2(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda) a_1(\lambda)^* = b_1(\lambda) a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda) b_2(\lambda)^*, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (23)$$

Lemma 3.3. *Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Let $a_j(\cdot)$ and $b_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, be given by (19) and (20), respectively. Then the following holds:*

$$a_2(\lambda) b_1(\lambda)^* - b_2(\lambda) a_1(\lambda)^* = b_1(\lambda) a_2(\lambda)^* - a_1(\lambda) b_2(\lambda)^* = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \quad (24)$$

Lemma 3.4. *Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Let $a_j(\cdot)$ and $b_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, be the matrix functions given by (19) and (20). Then the following relations hold:*

$$b_1(\lambda)^* a_2(\lambda) - b_2(\lambda)^* a_1(\lambda) = I_m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (25)$$

$$b_1(\lambda)^* b_2(\lambda) = b_2(\lambda)^* b_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (26)$$

$$a_1(\lambda)^* a_2(\lambda) = a_2(\lambda)^* a_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (27)$$

3.2. Investigating of the Weyl function. Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Denote by $AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ the set of locally absolutely continuous functions on $\mathbb{R}_+$, i.e. $f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ if $f \in AC[0, b]$ for any $b \in \mathbb{R}_+$. We set

$$Af := \mathcal{L}_Q(f), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad f \in \text{dom}(A),$$

$$\text{dom}(A) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}_Q(f) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m), \quad f(0) = f'(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (28)$$

and note (see [3], [28]) that the operator A coincides with the minimal operator $H_Q^{\min}$ associated with expression $\mathcal{L}_Q$. The adjoint operator A^* is given by

$$A^*f := \mathcal{L}_Q(f), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad f \in \text{dom}(A^*),$$

$$\text{dom}(A^*) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m) : \begin{array}{l} f, f' \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m), \\ \mathcal{L}_Q(f) \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^m) \end{array} \right\}$$

and coincides with the maximal operator $H_Q^{\max}$ associated with $\mathcal{L}_Q$ (see [3], [28]). It is important to note that the operator A is simple.

Lemma 3.5. *Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Then a triplet $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ with*

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0 f = f(0), \quad \Gamma_1 f = f'(0), \quad f = (f_1, \dots, f_m)^T \in \text{dom}(H_Q^{\max}), \quad (29)$$

is a boundary triplet for the operator $A^ = H_Q^{\max}$.*

PROPOSITION 3.6. Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$ and let $M(\cdot)$ be the Weyl function corresponding to the boundary triplet (29). Then the following holds:

(i) the matrix-valued functions $N_1(z)$,

$$N_1(z) = \frac{I_m}{2i\sqrt{z}} + \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} Q(t) S(t, z) dt, \quad (30)$$

and

$$N_2(z) = \frac{I_m}{2} - \frac{1}{2i\sqrt{z}} \int_0^\infty e^{it\sqrt{z}} Q(t) C(t, z) dt, \quad (31)$$

are both well defined for $z \in \widehat{\mathbb{C}}_0$ and continuous as well as holomorphic in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

(ii) the following relation holds:

$$N_1(z)M(z) = N_2(z), \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (32)$$

Lemma 3.7. *Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Let also $N_1(\cdot)$ and $N_2(\cdot)$ be the functions given by (30) and (31), respectively. Then the following holds.*

(i) *The non-tangential limits*

$$\begin{aligned} N_1(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \nearrow \lambda} N_1(z) = -\frac{1}{2}a_1(\lambda) - \frac{ia_2(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}, \\ N_2(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \nearrow \lambda} N_2(z) = \frac{1}{2}b_1(\lambda) + \frac{ib_2(\lambda)}{2\sqrt{\lambda}}, \end{aligned} \quad (33)$$

exist and are invertible for any $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(ii) For each bounded interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ there is a rectangle $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon) := [a, b] \times [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, such that $N_1(\cdot)^{-1}$ and $N_2(\cdot)^{-1}$ exist and are continuous in $\mathcal{R}(a, b, \varepsilon)$. In particular, it holds that

$$\lim_{z \rightarrow \lambda} N_1(z)^{-1} = N_1(\lambda)^{-1}, \quad \lim_{z \rightarrow \lambda} N_2(z)^{-1} = N_2(\lambda)^{-1} \quad (34)$$

for $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(iii) For each $\lambda \in \mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$ one has

$$\begin{aligned} N_1(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \lambda} N_1(z) = -\frac{I_m}{2\sqrt{|\lambda|}} - \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{|\lambda|}t} Q(t) S(t, \lambda) dt, \\ N_2(\lambda) &= \lim_{z \rightarrow \lambda} N_2(z) = \frac{I_m}{2} + \frac{1}{2\sqrt{|\lambda|}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{|\lambda|}t} Q(t) C(t, \lambda) dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Theorem 3.8. Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$. Further, let H_Q be the Dirichlet realization of (15) and let $M(\cdot)$ be the Weyl function corresponding to the boundary triplet (29). Then the following holds.

(i) The non-tangential boundary values $M(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} M(z)$ exist for each $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and

$$\begin{aligned} M(\lambda + i0) &= N_1(\lambda)^{-1} N_2(\lambda) = \\ &= -\left(\sqrt{\lambda} a_1(\lambda) + i a_2(\lambda)\right)^{-1} \left(\sqrt{\lambda} b_1(\lambda) + i b_2(\lambda)\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (36)$$

In particular, one has

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(M(\lambda + i0)) &= \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} (N_1(\lambda)^* N_1(\lambda))^{-1} = \\ &= \sqrt{\lambda} (\lambda a_1(\lambda)^* a_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* a_2(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (37)$$

(ii) The determinant $d_1(z) = \det(N_1(z))$ is holomorphic in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ and the set of its zeros Λ_1 is discrete. The Weyl function admits the representation

$$M(z) = N_1(z)^{-1} N_2(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_1. \quad (38)$$

(iii) The corresponding spectral measure $\Sigma_M(\cdot)$ (see (11)) on $\mathbb{R}_+$ is given by

$$\begin{aligned} \Sigma_M(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t \sqrt{\lambda} (\lambda a_1(\lambda)^* a_1(\lambda) + a_2(\lambda)^* a_2(\lambda))^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (N_1(\lambda)^* N_1(\lambda))^{-1} d\lambda. \end{aligned} \quad (39)$$

In particular, $\Sigma_M(\cdot)$ is absolutely continuous with continuous density $d\Sigma_M(\lambda)/d\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, of maximal rank.

(iv) The operator H_Q is semi-bounded from below and its negative spectrum is either finite or discrete with the only accumulation point at zero. Its non-negative part is purely absolutely continuous, $H_Q^{\text{ac}} = H_Q E_{H_Q}(\mathbb{R}_+)$ and $N_{H_Q^{\text{ac}}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. In particular, $\sigma_{\text{ac}}(H_Q) = [0, \infty)$, $\sigma_{\text{sc}}(H_Q) = \sigma_{\text{pp}}(H_Q) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, and $\sigma_{\text{pp}}(H_Q) \cap \mathbb{R}_- \subseteq \Lambda_1 \cap \mathbb{R}_-$.

Corollary 3.9. Let $Q(\cdot) = Q(\cdot)^* \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{m \times m})$ and let $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ be any self-adjoint extension of A . Let also $\tilde{\Pi} = \{\mathcal{H}, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ be a boundary triplet for A^* such that $\tilde{A} = A^* \upharpoonright \ker(\tilde{\Gamma}_0)$ and let $\tilde{M}(\cdot)$ be the corresponding Weyl function.

(i) The limit $\tilde{M}(\lambda + i0) := \lim_{z \rightarrow \lambda} \tilde{M}(z)$ exists for any $\lambda \in \mathbb{R}_+$ and $\tilde{M}_I(\lambda + i0)$ is positively definite. Moreover, the corresponding spectral measure $\Sigma_{\tilde{M}}$ admits the representation

$$\Sigma_{\tilde{M}}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t (M(\lambda)^* X_{21}^* + X_{22}^*)^{-1} M_I(\lambda) (X_{21} M(\lambda) + X_{22})^{-1} d\lambda, \quad t > 0. \quad (40)$$

(ii) The operators $E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+) \tilde{A}$ and $E_{H_Q}(\mathbb{R}_+) H_Q$ are unitarily equivalent and, hence $\tilde{A}^{\text{ac}} = \tilde{A} E_{\tilde{A}}(\mathbb{R}_+)$ and $N_{\tilde{A}^{\text{ac}}}(\lambda) = m$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Moreover, $\sigma_{\text{ac}}(\tilde{A}) = [0, \infty)$ and $\sigma_{\text{sc}}(\tilde{A}) = \sigma_{\text{pp}}(\tilde{A}) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

The operator $\tilde{A}$ is semi-bounded from below and its negative spectrum is either finite or discrete with the only accumulation point at zero.

REMARK 3.10. Theorem 3.8 generalizes the classical Titchmarsh's result (see [31, Chapter 5]) to the case of Sturm–Liouville operator with a matrix-valued summable potential and coincides with it in the scalar case ($m = 1$).

REMARK 3.11. If a potential matrix Q has a finite first moment, $\int_{\mathbb{R}_+} x |Q(x)| dx < \infty$, then the positive part $E_{H_Q}(\mathbb{R}_+) H_Q$ of L_Q^D is purely absolutely continuous of constant multiplicity m . Moreover in this case $\sigma_{\text{p}}(H_Q) = \sigma_{\text{p}}(H_Q) \cap \mathbb{R}_-$ is finite (see [1, Theorem 2.1.1]).

1. Agranovich Z.S., Marchenko V.A. The Inverse Problem of Scattering Theory, Gordon and Breach, New York, 1963.
2. Akhiezer N.I. The classical moment problem and some related questions in analysis. Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, London, 1965.
3. Akhiezer N.I., Glazman I.M. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces. – Nauka, 1978.
4. Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh-Krohn R., Holden H. Solvable Models in Quantum Mechanics. – AMS Chelsea Publ., 2005.
5. Albeverio S., Kostenko A., Malamud M., Neidhardt H. Spherical Schrödinger operators with δ -type interactions. // J. Math. Phys. – **54**, no. 5. – 2013. – P. 1–24.
6. Albeverio S., Kurasov P. Singular Perturbations of Differential Operators and Schrödinger Type Operators // Cambridge Univ. Press, 2000.
7. Baumgärtel H., Wollenberg M. Mathematical scattering theory // Birkhäuser Verlag, Basel, 1983.
8. Birman M.Sh., Solomjak M.Z. Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space // D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
9. Brasche J.F., Malamud M.M., Neidhardt H. Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions // Integr. Eq. Oper. Theory. – **43**. – 2002. – P. 264–289.

10. *Bruening J., Geyler V., Pankrashkin K.* Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators // *Rev. Math. Phys.* – **20**. – 2008. – P. 1–70.
11. *Clark S. and Gesztesy F.* Weyl–Titchmarsh M –functions asymptotics for matrix-valued Schrödinger operators // *Proc. Lond. Math. Soc.* – (3), 82(3):701–724, 2001
12. *Clark S., Gesztesy F., Holden H., and Levitan B.M.* Borg-type theorems for matrix-valued Schrödinger operators // *J. Differ. Equations.* – 167(1):181–210, 2000.
13. *Derkach V., Hassi S., Malamud M., H. de Snoo* Boundary triplets and Weyl functions. Recent developments. In *Operator Methods for Boundary Value Problems*, London Math. Soc., Lecture Notes Series. – 2012. – **404**. – P. 161–220.
14. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // *J. Funct. Anal.* – 1991. – **95**. – P. 1–95.
15. *Derkach V.A., Malamud M.M.* Generalised Resolvents and the boundary value problems for Hermitian Operators with gaps // *J. Math. Sci.* – 1995. – **73**, no 2. – P. 141–242.
16. *Exner P.* Appendix in *Solvable Models in Quantum Mechanics* by Albeverio S., Gesztesy F., Hoegh–Krohn R., Holden H., Sec. Edition // *AMS Chelsea Publ.*, 2004.
17. *Gesztesy F., Holden H.* A new class of solvable models in quantum mechanics describing point interactions on the line // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1987. – **20**. – P. 5157–5177.
18. *Gilbert D.J.* On subordinacy and analysis of the spectrum of Schrodinger operators with two singular endpoints
Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. – 1989. – **112**, no. 3–4. – P. 213–229.
19. *Gilbert D.J., Pearson D.B.* On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrodinger operators // *J.Math.Anal.Appl.* – 1987. – **128**. – P. 30–56.
20. *Gorbachuk V.I., Gorbachuk M.L.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations // *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. – **48**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1991.
21. *Grossmann A., Hoegh–Krohn R., Mebkhout M.* The one-particle theory of periodic point interactions // *J. Math. Phys.* – 1980. – **21**. – P. 2376–2385.
22. *Kostenko A.S., Malamud M.M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set // *J. Differential Equations.* – 2010. – **249**. – P. 253–304.
23. *Kostenko A., Malamud M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions: a review // In *Spectral Analysis, Differential Equations, and Mathematical Physics*, H. Holden et al. (eds), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Amer. Math. Soc. – 2013. – **87**. – P. 235–262.
24. *Krein M.G., Langer H.* On defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in a space Π_{κ} . // *Funct. Anal. Appl.* – 1971/1972. – **5/6**. – P. 136–146, – P. 217–228.
25. *R. de L. Kronig, Penney W.G.* Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // *Proc. Roy. Soc. (London)*. – 1931. – **130A**. – P. 499–513.
26. *Malamud M.M., Neidhardt H.* On the unitary equivalence of absolutely continuous parts of self-adjoint extensions // *J. Funct. Anal.* – 2011. – **260**, no. 3. – P. 613–638.
27. *Mikhailets V.A.* One-dimensional Schrödinger operator with point interactions // *Doklady Mathematics.* – 1994. – **335**, no. 4. – P. 421–423.
28. *Naïmark M.A.* Linear differential operators. Part II: Linear differential operators in Hilbert space. *Frederick Ungar Publishing Co.*, New York, 1968.
29. *Shubin C., Stolz G.* Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions // *J. Math. Anal. Appl.* – 1994. – **184**. – P. 491–516.
30. *Stolz G.* Bounded solutions and absolute continuity of Sturm-Liouville operators // *J. Math. Anal.* – **169**. – 1992. – P. 210–228.
31. *Titchmarsh E.C.* *Eigenfunction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations* // *Oxford: Clarendon Press*, 1946.

Я. И. Грановский

К спектральной теории векторнозначных операторов Штурма–Лиувилля с суммируемыми потенциалами.

Настоящая статья посвящена изучению спектра векторнозначных операторов Штурма–Лиувилля на полуоси с суммируемым потенциалом. Показано, что положительный спектр является чисто абсолютно непрерывным постоянной кратности. Отрицательный спектр является или конечным или дискретным с точкой накопления в нуле. Наш подход основан на исследовании соответствующих функций Вейля.

Ключевые слова: векторнозначный оператор Штурма–Лиувилля, спектр, абсолютно и сингулярно непрерывный спектр, собственные значения, граничные тройки, функция Вейля.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», г. Донецк
yarvodoley@mail.ru

Received 16.05.17

UDK 517.9

©2017. S. P. Degtyarev

A CLASS OF WEIGHTED HÖLDER SPACES FOR PARABOLIC MODELS OF MATHEMATICAL PHYSICS I. SOME AUXILIARY PROPERTIES

The present paper is devoted to studying of some weighted Hölder spaces. These spaces are designed in the way to serve as a framework for studying different statements for the thin film equations in weighted classes of smooth functions in the multidimensional setting. These spaces can serve also for considering of other equations with the degeneration on the boundary of the domain of definition. In the present paper we prove some useful auxiliary facts about such spaces.

Keywords: *weighted Hölder spaces, interpolation inequalities, degenerate parabolic equations.*

1. Introduction. The present paper is the second part of an investigation of the thin film equations with free boundary in classes of smooth functions (see [1] for the first part). This paper is devoted to studying of some weighted Hölder spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$. Here $m+\gamma$ is the order of smoothness, n is the order of a power weight, $\omega\gamma$ also regulates the weighted behavior of functions and their Hölder constants – see (5)–(15) below for the exact definitions. The aim to introduce these spaces is to obtain appropriate functional framework for studying in classes of smooth functions parabolic and elliptic equations with the degeneration at the boundary of the domain of definition. These equations are, for example, the thin film equations and the porous medium equation. In the case of the porous medium equation spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ were actually previously used (with another notation) in [2, 3] for the case $m = 2$, $n = 1$ and in [4, 5] with $m = 2$, $n \in (0, 1)$. The author is not aware of definitions or applications of such spaces to higher order equations like the thin film equations. An application to the multidimensional thin film equation in classes of smooth functions will be given in the forthcoming paper – see the preprint version in [6]. Note that the literature on the subject of the thin film equations is very numerous but almost all results with sufficient regularity are devoted to the case of one spatial variable. As a possible target for an application of the spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ we only mention the papers [8]–[22].

The spaces $C_{n,\omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ arise at the considering of the thin film equations in the following way. Let us explain this on the example for the thin film equation in the case of partial wetting (see, for example, [8] for the accurate statement). Consider the thin film equation of fourth order for an unknown function $h(x, t)$ (compare [1])

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla (h^n \nabla \Delta h - \beta \nabla h) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega(t), \quad (1)$$

where $n > 0$ is fixed, $\Omega(t)$ is a domain which depends on t . Consider also partial wetting conditions at $\partial\Omega(t)$

$$h|_{\partial\Omega(t)} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega(t)} = 1 \quad (2)$$

and an initial condition

$$h(x, 0) = w(x). \quad (3)$$

From (2) it follows that we must have for $h(x)$

$$h(x, t) \sim d = d(x, t) = \text{dist}(x, \partial\Omega(t)). \quad (4)$$

If we are going to consider equations (1) in classes of Hölder functions we have to consider $f(x, t)$ in (1) from some (may be weighted) Hölder class. This leads to the consideration of $\nabla(d^n \nabla \Delta u)$ from the same weighted Hölder class. In our definition below this will be the class $C_{n, (n/4)\gamma}^{4+\gamma, \frac{4+\gamma}{4}}$, where the fourth derivatives from h are smooth with the weight $d(x, t)^n$. A detailed example of an application of the classes $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}$ to degenerate PDE is given in [6], where it is proved that problem (1)–(3) has the unique solution from $C_{n, (n/4)\gamma}^{4+\gamma, \frac{4+\gamma}{4}}$.

Note that in the case of elliptic equations more simple weighted Hölder classes with unweighted Hölder constants can be used – [26, 27]. The reason is that in the elliptic case no agreement between smoothness in x -variables and t -variable is needed.

Let us turn now to exact definitions.

Denote $H = \{x = (x', x_N) \in R^N : x_N > 0\}$, $Q = \{(x, t) : x \in H, -\infty < t < \infty\}$. And we note at once that all the reasoning and statement below are valid in evident way also for $Q^+ = \{(x, t) : x \in H, t \geq 0\}$ instead of Q . Let m be a positive integer and let n be a positive number, $n < m$. Denote

$$\omega = n/m < 1.$$

Let $C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})$, $\gamma \in (0, 1)$, be the weighted Hölder space of continuous functions $u(x)$ with the finite norm

$$|u|_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \equiv \|u\|_{C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})} \equiv |u|_{\overline{H}}^{(0)} + \langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}, \quad (5)$$

where

$$|u|_{\overline{H}}^{(0)} = \max_{x \in \overline{H}} |u(x)|, \quad \langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{|x - \overline{x}|^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \overline{x}_N\}. \quad (6)$$

Thus $\langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}$ represents a weighted Hölder constant of the function $u(x)$. We suppose that

$$n < m, \quad \text{if } n \text{ is a noninteger,} \quad (1 - \omega)\gamma = \gamma \left(1 - \frac{n}{m}\right) < \min(\{n\}, 1 - \{n\}), \quad (7)$$

where for a real number a , $\{a\}$ is the fractional part of a , $[a]$ is the integer part of a . This assumption is technical and it allows us, for example, to consider the functions x_N^{n-j} as elements of $C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})$ for all integer $j < n$.

Remark 1. Note that in [2]–[4], [22] another definition of the same space $C_{\omega\gamma}^\gamma(\overline{H})$ is used. This definition is based on the notion of the Carnot–Carathéodory metric relevant to the corresponding degenerate differential operator. In terms of the Carnot–Carathéodory metric seminorm (6) is equivalent to

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} \simeq \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{s(x, \overline{x})^\gamma},$$

where the Carnot–Carathéodory distance is defined as

$$s(x, \overline{x}) = \frac{|x - \overline{x}|}{|x - \overline{x}|^\omega + x_N^\omega + \overline{x}_N^\omega}.$$

In the case of $m = 2$, $n \in (0, 1)$ this was proved in [5] and the general case is quite similar but one should also take into account Proposition 5 below. We use definition (6) for the following reason. The estimates of solutions from [2], [4], [3] for the second order equations are heavily based on the maximum principle arguments. In the case of higher order equations such arguments are impossible. Instead, we use some scaling arguments on the base of ideas from [7]. And it is more convenient to us to apply scaling arguments to seminorm (6).

In the similar way we define the Hölder seminorms with respect to each variable separately

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{h^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \overline{x}_N\}, i = \overline{1, N}, \quad (8)$$

where $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_N)$, $h > 0$.

In the standard way we denote by $\langle u \rangle_{x_i, \overline{H}}^{(\gamma)}$, $\langle u \rangle_{x', \overline{H}}^{(\gamma)}$, and $\langle u \rangle_{x, \overline{H}}^{(\gamma)}$ usual unweighted Hölder seminorms with respect to each variable separately, with respect to $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ or with respect to all x -variables.

Define a weighted Hölder space $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma}(\overline{H})$ as the space of continuous functions $u(x)$ with the finite norm

$$\begin{aligned} |u|_{n, \omega\gamma, \overline{H}}^{(m+\gamma)} &\equiv \|u\|_{C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma}(\overline{H})} = \\ &= |u|_{\overline{H}}^{(0)} + \sum_{0 < |\alpha| < m-n} |D_x^\alpha u|_{\overline{H}}^{(\gamma)} + \sum_{j=0}^{j \leq n} \sum_{\substack{|\alpha|=m-j, \\ \alpha_N \neq m-n}} |x_N^{n-j} D^\alpha u|_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Here $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ is a multiindex, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, $D^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_N}^{\alpha_N} u$. Note that we do not include in the definition of the norm the term $|D_{x_N}^{m-n} u|_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)}$ in the case of an integer n . The reason is that this term is finite only in the case of the special

behaviour of $x_N^n D_{x_N}^m u \rightarrow 0$ at $x_N \rightarrow 0$. This issue will be explained below. For the spaces with the finite term $|D_{x_N}^{m-n} u|_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}$ in the case of an integer n we use the notation with cap. That is the space $\widehat{C}_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma}(\bar{H})$ is the space with the finite norm

$$\begin{aligned} \widehat{|u|}_{n, \omega\gamma, \bar{H}}^{(m+\gamma)} &\equiv \|u\|_{\widehat{C}_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma}(\bar{H})} = \\ &= |u|_{\bar{H}}^{(0)} + \sum_{0 < |\alpha| < m-n} |D_x^\alpha u|_{\bar{H}}^{(\gamma)} + \sum_{j \leq n} \sum_{j=0} |\alpha|=m-j} |x_N^{n-j} D_x^\alpha u|_{\omega\gamma, \bar{H}}^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (10)$$

We will show below that the norm (9) is equivalent to the norm

$$\widetilde{|u|}_{n, \omega\gamma, \bar{H}}^{(m+\gamma)} = |u|_{\bar{H}}^{(0)} + \sum_{i=1}^N \langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \bar{H}}^{(\gamma)} \quad (11)$$

and the norm (10) in the case of an integer n is equivalent to the norm

$$\widehat{\widetilde{|u|}}_{n, \omega\gamma, \bar{H}}^{(m+\gamma)} = |u|_{\bar{H}}^{(0)} + \langle D_{x_N}^{m-n} u \rangle_{\omega\gamma, x_N, \bar{H}}^{(\gamma)} + \sum_{i=1}^N \langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (12)$$

Note that norms (11) and (12) contains only «pure» seminorms $\langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \bar{H}}^{(\gamma)}$ of «pure» derivatives $D_{x_i}^m u$ with respect to each of the independent variables separately. This fact is analogous to the case of unweighted spaces and it is very important for us. This permits, under the considering of a solution to equation (1) to study only these «pure» seminorms (see also Remark 3). The proof is in fact given in Theorem 2 below.

We also consider a space $C_{\omega\gamma}^{\gamma, \frac{\gamma}{m}}(\bar{Q})$ of functions $u(x, t)$ with the finite norm

$$|u|_{\omega\gamma, \bar{Q}}^{(\gamma)} \equiv \|u\|_{C_{\omega\gamma}^{\gamma, \frac{\gamma}{m}}(\bar{Q})} \equiv |u|_{\bar{Q}}^{(0)} + \langle u \rangle_{\omega\gamma, \bar{Q}}^{(\gamma, \gamma/m)}, \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{\omega\gamma, \bar{Q}}^{(\gamma, \gamma/m)} &\equiv \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{Q}}^{(\gamma)} + \langle u \rangle_{t, \bar{Q}}^{(\gamma/m)}, \\ \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{Q}}^{(\gamma)} &\equiv \sup_{x, \bar{x} \in \bar{Q}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x, t) - u(\bar{x}, t)|}{|x - \bar{x}|^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \bar{x}_N\}, \end{aligned} \quad (14)$$

and $\langle u \rangle_{t, \bar{Q}}^{(\gamma/m)}$ is the usual Hölder constant of u over $\bar{Q}$ with respect to t with the exponent γ/m .

Analogously to (9), (10) we consider the space $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}(\bar{Q})$ with the finite norm

$$\begin{aligned} |u|_{n, \omega\gamma, \bar{Q}}^{(m+\gamma)} &\equiv \|u\|_{C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}(\bar{Q})} = \\ &= |u|_{\bar{Q}}^{(0)} + \sum_{0 < |\alpha| < m-n} |D_x^\alpha u|_{\bar{Q}}^{(\gamma)} + \sum_{j=0} \sum_{|\alpha|=m-j, \alpha_N \neq m-n} |x_N^{n-j} D_x^\alpha u|_{\omega\gamma, \bar{Q}}^{(\gamma)} + |D_t u|_{\omega\gamma, \bar{Q}}^{(\gamma)}, \end{aligned} \quad (15)$$

and the space $\widehat{C}_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}(\bar{Q})$ with the finite norm

$$\widehat{|u|}_{n, \omega\gamma, \bar{Q}}^{(m+\gamma)} \equiv \|u\|_{\widehat{C}_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}(\bar{Q})} =$$

$$= |u|_{\overline{Q}}^{(0)} + \sum_{0 < |\alpha| < m-n} |D_x^\alpha u|_{\overline{Q}}^\gamma + \sum_{j=0}^{j \leq n} \sum_{|\alpha|=m-j} |x_N^{n-j} D_x^\alpha u|_{\omega\gamma, \overline{Q}}^{(\gamma)} + |D_t u|_{\omega\gamma, \overline{Q}}^{(\gamma)}. \quad (16)$$

And again we will show that the norm (15) is equivalent to the norm

$$\widetilde{|u|}_{n, \omega\gamma, \overline{Q}}^{(m+\gamma)} = |u|_{\overline{Q}}^{(0)} + \sum_{i=1}^N \langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{Q}}^{(\gamma)} + \langle D_t u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(\gamma/m)} \quad (17)$$

and the norm (16) in the case of an integer n is equivalent to the norm

$$\widetilde{|u|}_{n, \omega\gamma, \overline{Q}}^{(m+\gamma)} = |u|_{\overline{Q}}^{(0)} + \langle D_{x_N}^{m-n} u \rangle_{\omega\gamma, x_N, \overline{Q}}^{(\gamma)} + \sum_{i=1}^N \langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{Q}}^{(\gamma)} + \langle D_t u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(\gamma/m)}. \quad (18)$$

Namely, we have the following estimate which is one of the main results of the present paper.

Recall that $\langle D_t u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(\gamma/m)}$ is the usual Hölder constant of $D_t u$ over $\overline{Q}$ with respect only to t with the exponent γ/m and $\langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{Q}}^{(\gamma)}$ is the weighted Hölder constants of the «pure» derivatives $x_N^n D_{x_i}^m u$ with respect only to the corresponding variables x_i with the same index i , $i = \overline{1, N}$. That is

$$\langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{Q}}^{(\gamma)} \equiv \sup_{(x, t), (\bar{x}, t) \in \overline{Q}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x, t) - u(\bar{x}, t)|}{|x_i - \bar{x}_i|^\gamma}, \quad x_N^* = \max\{x_N, \bar{x}_N\},$$

where sup is taken over $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, \bar{x}_i, \dots, x_N)$.

Theorem 2. *Let $u(x, t)$ be continuous in $\overline{Q}$ and the right hand side in (19) below is finite. Then for some $C = C(N, \gamma, m, n)$*

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{n, \omega\gamma, \overline{Q}}^{(m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m})} &\equiv \sum_{j=0}^{j \leq n} \sum_{|\alpha|=m-j} \langle x_N^{n-j} D_x^\alpha u \rangle_{\omega\gamma, \overline{Q}}^{(\gamma, \gamma/m)} + \sum_{j=0}^{j \leq n} \sum_{|\alpha|=m-j} \langle x_N^{n-j\omega} D_x^\alpha u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(\frac{\gamma+j}{m})} + \\ &+ \langle D_t u \rangle_{\omega\gamma, \overline{Q}}^{(\gamma, \gamma/m)} + \sum_{j=0}^{j \leq m-n} \sum_{|\alpha|=m-n+(1-\omega)\gamma-j} \langle D_{x'}^\alpha D_{x_N}^j u \rangle_{x', \overline{Q}}^{\{m-n+(1-\omega)\gamma\}} + \\ &+ \sum_{j=0}^{j \leq m-n} \sum_{|\alpha|=m-n+\gamma-j} \langle D_{x'}^\alpha D_{x_N}^j u \rangle_{\omega\gamma, x', \overline{Q}}^{\{m-n+\gamma\}} + \\ &+ \sum_{j=1}^{j \leq m-n} \sum_{|\alpha|=j} \langle D_{x'}^\alpha u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(1-\frac{j}{m-n}+\frac{\gamma}{m})} \leq C \left(\sum_{i=1}^N \langle x_N^n D_{x_i}^m u \rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{Q}}^{(\gamma)} + \langle D_t u \rangle_{t, \overline{Q}}^{(\gamma/m)} \right), \quad (19) \end{aligned}$$

where, $[a]$ and $\{a\}$ are the integer and the fractional parts of a real number a correspondingly and in the left hand side of (19) included only those terms that are finite.

Moreover

$$\begin{aligned} x_N^{n-j} D_x^\alpha u(x, t) &\rightarrow 0, \quad x_N \rightarrow 0, \quad 0 \leq j < n, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = m - j, \quad \alpha_N < m - j. \end{aligned} \quad (20)$$

If $u(x)$ is continuous in $\overline{H}$ and the right hand side in (21) below is finite then for some $C = C(N, \gamma, m, n)$

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{n, \omega\gamma, \overline{H}}^{(m+\gamma)} &\equiv \sum_{j=0}^{j \leq n} \sum_{|\alpha|=m-j} \left\langle x_N^{n-j} D_x^\alpha u \right\rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} + \sum_{j=0}^{j \leq m-n} \sum_{|\alpha|=[m-n+\gamma]-j} \left\langle D_{x'}^\alpha D_{x_N}^j u \right\rangle_{\omega\gamma, x', \overline{Q}}^{\{\{m-n+\gamma\}\}} + \\ &+ \sum_{j=0}^{j \leq m-n} \sum_{|\alpha|=[m-n+(1-\omega)\gamma]-j} \left\langle D_{x'}^\alpha D_{x_N}^j u \right\rangle_{x', \overline{H}}^{\{\{m-n+(1-\omega)\gamma\}\}} \leq C \sum_{i=1}^N \left\langle x_N^n D_{x_i}^m u \right\rangle_{\omega\gamma, x_i, \overline{H}}^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (21)$$

and in the left hand side of (21) included only those terms that are finite. Moreover,

$$\begin{aligned} x_N^{n-j} D_x^\alpha u(x) &\rightarrow 0, \quad x_N \rightarrow 0, \quad 0 \leq j < n, \\ \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_N), \quad |\alpha| = m - j, \quad \alpha_N < m - j. \end{aligned} \quad (22)$$

Note that Theorem 2 is an analog for weighted Hölder spaces of well known properties of standard Hölder spaces and it will be proved in subsequent parts of our investigations. We are going to use these known properties so we formulate them in the next section.

Let us stress that the assumption that the terms in the left hand side of (19), (21) are finite is essential. Consider in $\{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$ for $m = 2$ the function $u(x) = x_1^2 x_2^{2-n}$, where $n \in [0, 1)$. For this function the right hand side of (21) is zero but the Hölder seminorms of the mixed derivative $x_2^n D_{x_1 x_2}^2 u$ in the left hand side are infinite.

Remark 3. Note that such properties of the spaces $C_{n, \omega\gamma}^{m+\gamma, \frac{m+\gamma}{m}}(\overline{Q})$ as their traces and interpolation inequalities for mixed seminorms are fundamentally important for applications to boundary value problems for degenerate PDE. For example, in [6] we suggest the following approach to obtaining Schauder's estimates for such PDE as an adaptation to the degenerate case of the ideas from [7]. Applying some scaling arguments to a model problem in a half-space, we should first obtain the estimates of "pure" highest seminorm of a solution with respect to only tangent to the boundary of the domain variables. Then we move in an equation all the tangent derivatives in the right hand side and reduce the situation to an ordinary equation with respect to the normal variable x_N . The estimate of the right hand side of this equation goes on the base of interpolation.

2. Some useful assertions about weighted spaces of smooth functions. Let M be a positive integer. In the space R^M we use standard Hölder spaces $C^{\vec{l}}(R^M)$, where $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$, l_i are arbitrary positive non-integers. The norm in such spaces is defined by

$$\|u\|_{C^{\vec{l}}(R^M)} \equiv |u|_{R^M}^{(\vec{l})} = |u|_{R^M}^{(0)} + \sum_{i=1}^M \langle u \rangle_{x_i, R^M}^{(l_i)}, \quad (23)$$

$$\langle u \rangle_{x_i, R^M}^{(l_i)} = \sup_{x \in R^M, h > 0} \frac{|D_{x_i}^{[l_i]} u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_M) - D_{x_i}^{[l_i]} u(x)|}{h^{l_i - [l_i]}}, \quad (24)$$

where $[l_i]$ is the integer part of the number l_i , $D_{x_i}^{[l_i]} u$ is the derivative of order $[l_i]$ with respect to the variable x_i of a function u .

Proposition 4. *Seminorm (24) can be equivalently defined by ([28]–[30])*

$$\langle u \rangle_{x_i, R^M}^{(l_i)} \simeq \sup_{x \in R^M, h > 0} \frac{|\Delta_{h, x_i}^k u(x)|}{h^{l_i}}, \quad k > l_i, \quad (25)$$

where $\Delta_{h, x_i} u(x) = u(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_N) - u(x)$ is the difference from a function $u(x)$ with respect to the variable x_i with a step h , $\Delta_{h, x_i}^k u(x) = \Delta_{h, x_i}(\Delta_{h, x_i}^{k-1} u(x)) = (\Delta_{h, x_i})^k u(x)$ is the difference of power k .

The same is also valid not only for the whole space R^M but also for its subsets of the form $R^M \cap \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_K} \geq 0\}$ with $K \leq M$. Note that below we prove an analogous statement for weighted spaces.

It is known that functions from the space $C^{\bar{l}}(R^M)$ have also mixed derivatives up to definite orders and all derivatives are Hölder continuous with respect to all variables with some exponents in accordance with ratios between the exponents l_i . Namely, if $\bar{k} = (k_1, \dots, k_M)$ with nonnegative integers k_i , $k_i \leq [l_i]$, and

$$\omega = 1 - \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{l_i} > 0, \quad (26)$$

then (see for example [29])

$$D_x^{\bar{k}} u(x) \in C^{\bar{d}}(R^M), \quad \|D_x^{\bar{k}} u\|_{C^{\bar{d}}(R^M)} \leq C \|u\|_{C^{\bar{l}}(R^M)}, \quad (27)$$

where

$$\bar{d} = (d_1, \dots, d_M), \quad d_i = \omega l_i. \quad (28)$$

Moreover, relation (27) is valid not only for R^M but for any domain $\Omega \subset R^M$ with sufficiently smooth boundary and we have

$$\|D_x^{\bar{k}} u\|_{C^{\bar{d}}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{C^{\bar{l}}(\bar{\Omega})}. \quad (29)$$

For special domains of the form $\Omega_+ = R^M \cap \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_K} \geq 0\}$ we have even more strong inequality just for seminorms

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{i=1}^M \left\langle D_x^{\bar{k}} u \right\rangle_{x_i, \bar{\Omega}_+}^{(d_i)} \leq C \sum_{i=1}^M \langle u \rangle_{x_i, \bar{\Omega}_+}^{(l_i)}. \quad (30)$$

Here the sum is taken over all $\bar{k}$ with the property (26) and d_i are defined in (28).

The analog of this estimate for an arbitrary smooth domain Ω (including bounded domains) is

$$\sum_{\bar{k}} \sum_{i=1}^M \left\langle D_{\bar{x}}^{\bar{k}} u \right\rangle_{x_i, \bar{\Omega}}^{(\hat{d}_i)} \leq C \left(\sum_{i=1}^M \langle u \rangle_{x_i, \bar{\Omega}}^{(l_i)} + |u|_{\bar{\Omega}}^{(0)} \right) \quad (31)$$

with arbitrary $\hat{d}_i \leq d_i$. Note that inequalities (19) and (21) are in fact a particular cases of (30) for weighted spaces.

It turns out that the weighted space $C_{\omega\gamma}^{\gamma}(\bar{H})$ is embedded into the usual space $C^{\gamma-\omega\gamma}(\bar{H})$. Namely, we have the following assertion.

Proposition 5. *Let a function $u(x) \in C_{\omega\gamma}^{\gamma}(\bar{H})$. Then $u(x)$ is continuous in $\bar{H}$ and*

$$\langle u \rangle_{x, \bar{H}}^{(\gamma-\omega\gamma)} \leq C \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (32)$$

Proof. We consider the Hölder property with the exponent $\gamma - \omega\gamma$ of the function $u(x)$ with respect to the variable x_N and with respect to the variables x' separately.

Consider the ratio with $h > 0$

$$\begin{aligned} A_h &\equiv \frac{|u(x', x_N + h) - u(x', x_N)|}{h^{\gamma-\omega\gamma}} = h^{\omega\gamma} \frac{|u(x', x_N + h) - u(x', x_N)|}{h^{\gamma}} \leq \\ &\leq (x_N + h)^{\omega\gamma} \frac{|u(x', x_N + h) - u(x', x_N)|}{h^{\gamma}} \leq \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{H}}^{(\gamma)}. \end{aligned}$$

Thus it is proved that at least on open set H

$$\langle u \rangle_{x_N, H}^{(\gamma-\omega\gamma)} \leq \langle u \rangle_{\omega\gamma, x_N, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (33)$$

Let now $\bar{h} = (h_1, \dots, h_{N-1})$. Consider the expression

$$A_h \equiv \frac{|u(x' + \bar{h}, x_N) - u(x', x_N)|}{|\bar{h}|^{\gamma-\omega\gamma}}.$$

If $|\bar{h}| \leq x_N/2$ we can write

$$\begin{aligned} A_h &= |\bar{h}|^{\omega\gamma} \frac{|u(x' + \bar{h}, x_N) - u(x', x_N)|}{|\bar{h}|^{\gamma}} \leq \\ &\leq C x_N^{\omega\gamma} \frac{|u(x' + \bar{h}, x_N) - u(x', x_N)|}{|\bar{h}|^{\gamma}} \leq C \langle u \rangle_{\omega\gamma, x', \bar{H}}^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (34)$$

If now $|\bar{h}| > x_N/2$, then we estimate A_h as

$$\begin{aligned} A_h &\leq \frac{|u(x' + \bar{h}, x_N) - u(x' + \bar{h}, x_N + 2|\bar{h}|)|}{|\bar{h}|^{\gamma}} + \\ &+ \frac{|u(x' + \bar{h}, x_N + 2|\bar{h}|) - u(x', x_N + 2|\bar{h}|)|}{|\bar{h}|^{\gamma-\omega\gamma}} + \frac{|u(x', x_N + 2|\bar{h}|) - u(x', x_N)|}{|\bar{h}|^{\gamma-\omega\gamma}} \equiv \sum_{i=1}^3 I_i. \end{aligned}$$

The estimates for I_1 and I_3 follow from (33) and the estimate for I_2 follows from (34) because in this case $|\bar{h}| \leq (x_N + 2|\bar{h}|)/2$. Thus in this case

$$A_h \leq C(\langle u \rangle_{\omega\gamma, x_N, \bar{H}}^{(\gamma)} + \langle u \rangle_{\omega\gamma, x', \bar{H}}^{(\gamma)}) \leq C \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{H}}^{(\gamma)}.$$

Consequently, it is proved that on open set H

$$\langle u \rangle_{x', H}^{(\gamma-\omega\gamma)} \leq C \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{H}}^{(\gamma)}. \quad (35)$$

From (33) and (35) it follows that

$$\langle u \rangle_{x, H}^{(\gamma-\omega\gamma)} \leq C \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \bar{H}}^{(\gamma)}.$$

This means that $u(x)$ has a finite limit as $x_N \rightarrow 0$ and consequently can be defined at $x_N = 0$ as a continuous function with (32). Thus the proposition follows.

We need also the analog of relation (5) for weighted seminorm.

Proposition 6. *Let $l = m + \gamma > 0$ be noninteger, $m = [l]$, $\gamma \in (0, 1)$, and let a function $u(y) \in C_{\omega\gamma}^l([0, \infty))$, $\omega \in (0, 1)$, in the sense that*

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} = \sup_{y, h > 0} (y + h)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m u(y + h) - D_y^m u(y)|}{h^\gamma} < \infty. \quad (36)$$

Then for any integer $k > l$

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} \leq C_k \sup_{y, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} \equiv C_k \langle \langle u \rangle \rangle_{\omega\gamma, y}^{(l)(k)}, \quad (37)$$

where $\Delta_h^k u(y)$ is the k -th difference with the step h , $\Delta_h^1 u(y) = \Delta_h u(y) = u(y+h) - u(y)$, $\Delta_h^k u(y) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} u(y))$. Note that the inverse inequality to (37) is evident because of the mean value theorem.

Proof. The idea of the proof is taken from [31] and demonstrates also the main idea of the proof of Theorem 2. Let $\varepsilon \in (0, 1)$ be fixed and will be chosen later. To prove (37) we represent $\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)}$ as

$$\begin{aligned} \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} &\leq \sup_{y, h \geq \varepsilon y} (y + h)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m u(y + h) - D_y^m u(y)|}{h^\gamma} + \\ &+ \sup_{y, 0 < h < \varepsilon y} (y + h)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m u(y + h) - D_y^m u(y)|}{h^\gamma} \equiv \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)} + \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon-)}. \end{aligned} \quad (38)$$

We are going to consider the two cases for the relation between $\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)}$ and $\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon-)}$.

Suppose first that

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon-)} \leq \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)}, \quad (39)$$

and consequently

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)} \leq \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} \leq 2 \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)} . \quad (40)$$

We prove that in this case

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)(\varepsilon+)} \leq C_{\varepsilon, k} \sup_{y, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} . \quad (41)$$

The proof is by contradiction. Suppose that (41) is not valid. Then for any positive integer p there exists a function $u_p(y) \in C_{\omega\gamma}^l([0, \infty))$ with

$$\sup_{y, h \geq \varepsilon y} (y+h)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m u_p(y+h) - D_y^m u_p(y)|}{h^\gamma} \geq p \sup_{y, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k u_p(y)|}{h^l} . \quad (42)$$

Consider the functions

$$w_p(y) = \frac{u_p(y)}{\langle D_y^m u_p \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)}} . \quad (43)$$

For such functions we have by the definition and by (42), (40)

$$\langle D_y^m w_p \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} = 1, \quad \sup_{y, h \geq \varepsilon y} (y+h)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m w_p(y+h) - D_y^m w_p(y)|}{h^\gamma} \geq \frac{1}{2}, \quad (44)$$

$$\sup_{y, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k w_p(y)|}{h^l} \leq \frac{1}{p} . \quad (45)$$

It follows from the second relation in (44) that there exist sequences $\{y_p\} \subset [0, \infty)$ and $\{h_p\} \subset (0, \infty)$ with

$$(y_p + h_p)^{\omega\gamma} \frac{|D_y^m w_p(y_p + h_p) - D_y^m w_p(y_p)|}{h_p^\gamma} \geq \frac{1}{4} . \quad (46)$$

Now we apply the scaling arguments. Define the sequence of scaled functions $\{v_p(z)\}$,

$z \in [0, \infty)$,

$$v_p(z) \equiv h_p^{-m-(1-\omega)\gamma} w_p(z h_p) . \quad (47)$$

It follows from this definition and from (44)–(46) that

$$\langle D_z^m v_p \rangle_{\omega\gamma, z}^{(\gamma)} = 1, \quad \sup_{z, h > 0} z^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k v_p(z)|}{h^l} \leq \frac{1}{p}, \quad (48)$$

$$(z_n + 1)^{\omega\gamma} |D_z^m v_p(z_p + 1) - D_z^m v_p(z_p)| \geq \frac{1}{4}, \quad (49)$$

where $z_p = y_p/h_p$. Let now $P_m^{(p)}(z)$ be the Taylor polynomial of the degree m for the function $v_p(z)$ at the point, for example, $z = 1$. Since $D_z^m P_m^{(p)}(z) = \text{const}$ and $k > m$ in (48), we have for the functions $r_p(z) = v_p(z) - P_m^{(p)}(z)$

$$\langle D_z^m r_p \rangle_{\omega\gamma, z}^{(\gamma)} = 1, \quad \sup_{z, h > 0} z^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k r_p(z)|}{h^l} \leq \frac{1}{p}, \quad (50)$$

$$(z_p + 1)^{\omega\gamma} |D_z^m r_p(z_p + 1) - D_z^m r_p(z_p)| \geq \frac{1}{4}. \quad (51)$$

From Proposition 5, the first relation in (48), and from the fact that $D^i r_p(1) = 0$, $i = \overline{0, m}$, it follows that

$$\|r_p\|_{C^{m+(1-\omega)\gamma}(K)} \leq C(K) = CR^m, \quad (52)$$

where K is a compact set in $[0, \infty)$, $K \subseteq [0, R]$, $R > 0$. From this and the Arzela theorem we conclude that (at least for a subsequence) $D^i r_p(z)$, $i = \overline{0, m}$, uniformly converge on compact sets K to some function $r(z)$ and it's derivatives

$$D^i r_p(z) \rightrightarrows_K D^i r(z), \quad i = \overline{0, m}. \quad (53)$$

This, together with the first relation in (50), in particular, gives

$$\langle D_z^m r \rangle_{\omega\gamma, z}^{(\gamma)} + \langle D_z^m r \rangle_z^{((1-\omega)\gamma)} \leq 1. \quad (54)$$

Let now $z, h > 0$ be fixed. From (50) it follows that

$$z^{\omega\gamma} |\Delta_h^k r_p(z)| \leq \frac{1}{p} h^l$$

and letting $p \rightarrow \infty$ we obtain $\Delta_h^k r(z) = 0$. As z and h are arbitrary we conclude that

$$\Delta_h^k r(z) \equiv 0, \quad z, h > 0,$$

and consequently $r(z)$ is a polynomial of degree not greater than $k - 1$. Moreover $D^m r(z)$ is not a constant because of (51). Indeed, consider the sequence $\{z_p\}$. Since we are considering $A_1(\varepsilon)$ with the condition $h \geq \varepsilon y$, we have $0 \leq z_p = y_p/h_p \leq 1/\varepsilon$. Therefore for a subsequence $z_p \rightarrow z_0$, $n \rightarrow \infty$. Then it follows from (51) and (53) that

$$(z_0 + 1)^{\omega\gamma} |D_z^m r(z_0 + 1) - D_z^m r(z_0)| \geq \frac{1}{4}$$

that is $D^m r(z)$ is not a constant polynomial. But this fact contradicts to (54) since a non constant polynomial can not have finite seminorms as those in (54). This contradiction shows that (41) is valid with some constant $C_{\varepsilon, k}$ and in this case we have also (37) with such $C_{\varepsilon, k}$ by virtue of (40).

Suppose now that $\langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon+)} \leq \langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon-)}$. In this case we have instead of (40)

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon-)} \leq \langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)} \leq 2 \langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon-)}. \quad (55)$$

We prove in this case the estimate

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon-)} \leq C_{\varepsilon,k} \sup_{y,h>0} y^{\omega_{\gamma}} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} + C_k \varepsilon^{1-\gamma} \langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)}, \quad (56)$$

where C_k does not depend on $\varepsilon \in (0, 1/(8k))$. We apply some local considerations around arbitrary point in $[0, \infty)$. Let $y_0 > 0$ and $0 < h < \varepsilon y_0$ be fixed. Let $B = [y_0/4, 7y_0/4]$ be a ball with center in y_0 and of radius $3y_0/4$. Denote by $\eta(y) \in C^\infty([0, \infty))$ a smooth function with the properties

$$\eta(y) \equiv 1, \quad |y - y_0| \leq \frac{1}{4}y_0, \quad \eta(y) \equiv 0, \quad |y - y_0| \geq \frac{1}{2}y_0, \quad |D_y^s \eta(y)| \leq C_s y_0^{-s}. \quad (57)$$

Without loss of generality we can assume that

$$D_y^i u(y_0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m. \quad (58)$$

If it is not the case we can consider $\bar{u}(y) = u(y) - P_{y_0}^{(m)}(y)$ instead of $u(y)$, where $P_{y_0}^{(m)}(y)$ is the Taylor polynomial of $u(y)$ of power m at the point y_0 . It is possible because $\Delta_h D_y^m u(y) \equiv \Delta_h D_y^m \bar{u}(y)$ and $\Delta_h^k u(y) \equiv \Delta_h^k \bar{u}(y)$. Denote also $v(y) = u(y) \eta(y)$. Keeping in mind the definition of $\langle D_y^m u \rangle_{\omega_{\gamma,y}}^{(\gamma)(\varepsilon-)}$, we have by virtue of the properties of η in (57) and $h < \varepsilon y_0 < y_0/4$

$$\begin{aligned} A_2^{(y_0,h)}(\varepsilon) &\equiv (y_0 + h)^{\omega_{\gamma}} \frac{|D_y^m u(y_0 + h) - D_y^m u(y_0)|}{h^{\gamma}} = \\ &= (y_0 + h)^{\omega_{\gamma}} \frac{|D_y^m v(y_0 + h) - D_y^m v(y_0)|}{h^{\gamma}} \equiv (y_0 + h)^{\omega_{\gamma}} \cdot A. \end{aligned} \quad (59)$$

Note that the truncated function $v(y) = u(y) \eta(y) \in C^{m+\gamma}([0, \infty))$, that is to the usual space without a weight. Thus by (25) we have ($l = m + \gamma$)

$$A \leq C \sup_{y,h>0} \frac{|\Delta_h^k v(y)|}{h^l}. \quad (60)$$

The ratio in the right hand side of this inequality has the form

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_h^k v(y)}{h^l} &= \frac{\Delta_h^k (u(y) \eta(y))}{h^l} = \sum_{i=0}^k C_i \frac{\Delta_h^i u(y_i^{(u)}) \Delta_h^{k-i} \eta(y_i^{(\eta)})}{h^l} = \\ &= \frac{\Delta_h^k u(y)}{h^l} \eta(y_k^{(\eta)}) + \sum_{i=0}^{k-1} C_i \frac{\Delta_h^i u(y_i^{(u)}) \Delta_h^{k-i} \eta(y_i^{(\eta)})}{h^l} \equiv I_k + \sum_{i=0}^{k-1} I_i, \end{aligned} \quad (61)$$

where $y_i^{(u)} = y + n_i h$, $y_i^{(\eta)} = y + m_i h$, and $n_i \leq k$, $m_i \leq k$, $C_i \leq C(k)$ are some integers. Evidently, by virtue of (57)

$$|I_k| \leq \sup_{y \in B, h > 0} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l}. \quad (62)$$

Let us estimate expressions I_i in (61). First, it follows from (57) and the mean value theorem that

$$|\Delta_h^{k-i} \eta(y_i^{(\eta)})| \leq C_k h^{k-i} y_0^{-(k-i)}. \quad (63)$$

Besides, as it follows from (58),

$$|D_y^i u(y)| \leq C |y - y_0|^{m+\gamma-i} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}, \quad y \in B, i = \overline{0, m}.$$

Since $\varepsilon < 1/(8k)$ is sufficiently small and $h < \varepsilon y_0$, it follows from the last inequality and the mean value theorem that

$$|\Delta_h^i u(y_i^{(u)})| \leq C_k \begin{cases} h^i y_0^{m+\gamma-i} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}, & i \leq m, \\ h^{m+\gamma} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}, & m < i \leq k-1. \end{cases} \quad (64)$$

From (63) and (64) we have ($h < \varepsilon y_0$)

$$\begin{aligned} |I_i| &\leq C_k h^{-l} h^{k-i} y_0^{-(k-i)} h^i y_0^{m+\gamma-i} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)} = \\ &= C_k h^{(k-l)} y_0^{-(k-l)} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)} \leq C_k \varepsilon^{(k-l)} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}, \quad i \leq m, \end{aligned} \quad (65)$$

and

$$\begin{aligned} |I_i| &\leq C_k h^{-l} h^{k-i} y_0^{-(k-i)} h^{m+\gamma} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)} = \\ &= C_k h^{k-i} y_0^{-(k-i)} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)} \leq C_k \varepsilon^{(k-i)} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}, \quad m < i \leq k-1. \end{aligned} \quad (66)$$

From (59)–(62), (65), and (66) it follows that the expression $A_2^{(y_0, h)}(\varepsilon)$ in (59) is estimated as follows

$$A_2^{(y_0, h)}(\varepsilon) \leq C_k (y_0 + h)^{\omega\gamma} \sup_{y \in B, h > 0} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} + C_k \varepsilon^{1-\gamma} (y_0 + h)^{\omega\gamma} \langle D_y^m u \rangle_B^{(\gamma)}.$$

Since $h \leq \varepsilon y_0$ and on the ball B we have $y_0/4 \leq y \leq 7y_0/4$, we infer

$$A_2^{(y_0, h)}(\varepsilon) \leq C_k \sup_{y \in B, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} + C_k \varepsilon^{1-\gamma} \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y, B}^{(\gamma)}.$$

As the point y_0 is arbitrary, we obtain (56).

Combining now estimates (41) and (56), we obtain with $\varepsilon < 1/8k$

$$\langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)} \leq C_{\varepsilon, k} \sup_{y, h > 0} y^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_h^k u(y)|}{h^l} + C_k \varepsilon^{1-\gamma} \langle D_y^m u \rangle_{\omega\gamma, y}^{(\gamma)}.$$

Choosing now ε in the last term sufficiently small and absorbing this term in the left hand side, we arrive at the assertion of the proposition.

As a corollary we have the following assertion.

Proposition 7. *Let a function $u(x)$ be defined in $\overline{H}$ and*

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)} \equiv \sup_{x, \overline{h} \in \overline{H}} (x_N + h_N)^{\omega\gamma} \frac{|u(x + \overline{h}) - u(x)|}{|\overline{h}|^\gamma} < \infty, \quad \gamma \in (0, 1).$$

Then for any integer $k \geq 1$ there is a constant $C_k^{(i)} = C^{(i)}(k, N, \gamma, \omega)$, $i = 1, 2$, with

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)} \leq C_k^{(1)} \sup_{x, \overline{h} \in \overline{H}} x_N^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_{\overline{h}}^k u(x)|}{|\overline{h}|^\gamma} \equiv C_k^{(1)} \langle \langle u \rangle \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)(k)} \quad (67)$$

and

$$\langle \langle u \rangle \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)(k)} \leq C_k^{(2)} \langle u \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)}. \quad (68)$$

Proof. We prove only (67) because (68) can be checked directly.

It is enough to verify the weighted Hölder property with respect to $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ and x_N separately. Let first x' be fixed and $\overline{h} = (0, \dots, 0, h)$, $h > 0$. Then

$$\begin{aligned} & (x_N + h_N)^{\omega\gamma} \frac{|u(x + \overline{h}) - u(x)|}{|\overline{h}|^\gamma} = \\ & = (x_N + h_N)^{\omega\gamma} \frac{|u(x', x_N + h) - u(x', x_N)|}{h^\gamma} \leq C_k^{(1)} \langle \langle u \rangle \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)(k)} \end{aligned} \quad (69)$$

by Proposition 6. Let now x_N be fixed and $\overline{h} = (h_1, \dots, h_{N-1}, 0) = (h', 0)$ with $h_N = 0$. Then

$$\begin{aligned} & (x_N + h_N)^{\omega\gamma} \frac{|u(x + \overline{h}) - u(x)|}{|\overline{h}|^\gamma} = x_N^{\omega\gamma} \left(\frac{|u(x' + h', x_N) - u(x', x_N)|}{|\overline{h}|^\gamma} \right) \leq \\ & \leq x_N^{\omega\gamma} \sup_{x', h'} \frac{|\Delta_{h'}^k u(x', x_N)|}{|h'|^\gamma} = \sup_{x', h'} x_N^{\omega\gamma} \frac{|\Delta_{h'}^k u(x', x_N)|}{|h'|^\gamma} \leq C_k^{(1)} \langle \langle u \rangle \rangle_{\omega\gamma, x, \overline{H}}^{(\gamma)(k)} \end{aligned} \quad (70)$$

by (25). The assertion of the proposition follows now from (69) and (70).

Corollary 8. *The seminorms*

$$\langle u \rangle_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} (x_N^*)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{|x - \overline{x}|^\gamma},$$

with $x_N^* = \max\{x_N, \overline{x}_N\}$ and

$$\widehat{\langle u \rangle}_{\omega\gamma, \overline{H}}^{(\gamma)} = \sup_{x, \overline{x} \in \overline{H}} (\widehat{x}_N)^{\omega\gamma} \frac{|u(x) - u(\overline{x})|}{|x - \overline{x}|^\gamma},$$

with $\widehat{x}_N = \min\{x_N, \overline{x}_N\}$ are equivalent.

For the proof of this corollary it is enough to choose $k = 1$ in (67).

1. *Degtyarev S.P.* Liouville Property for Solutions of the Linearized Degenerate Thin Film Equation of Fourth Order in a Halfspace – Results in Mathematics. DOI 10.1007/s00025-015-0467-x, 2015.
2. *Daskalopoulos P., Hamilton R.* Regularity of the free boundary for the porous medium equation // J. Amer. Math. Soc. – 1998. – **11**, № 4. – P. 899–965.
3. *Paul M.N. Feehan, Camelia A. Pop* Schauder a priori estimates and regularity of solutions to boundary-degenerate elliptic linear second-order partial differential equations // J. Differ. Equations. – 2014. – **256**, № 3. – P. 895–956.
4. *Sunghoon Kim, Ki-Ahm Lee* Smooth solution for the porous medium equation in a bounded domain // J. Differ. Equations. – 2009. – **247**, № 4. – P. 1064–1095.
5. *Degtyarev S.P.* Classical solvability of multidimensional two-phase Stefan problem for degenerate parabolic equations and Schauder’s estimates for a degenerate parabolic problem with dynamic boundary conditions // Nonlinear Differential Equations and Applications (NoDEA). – 2015. – **22**, № 2. – P. 185–237.
6. *Degtyarev S.P.* Classical solvability of the multidimensional free boundary problem for the thin film equation in the case of partial wetting – <http://arxiv.org/abs/1509.07974>, 2015.
7. *Simon L.* Schauder estimates by scaling // Calc. Var. Partial Differ. Equ. – 1997. – **5**, № 5. – P. 391–407.
8. *Knüpfer H.* Well-posedness for the Navier slip thin-film equation in the case of partial wetting // Comm. Pure Appl. Math. – 2011. – **64**, № 9. – P. 1263–1296.
9. *Giacomelli L., Knüpfer H., Otto F.* Smooth zero-contact-angle solutions to a thin-film equation around the steady state // J. Differential Equations. – 2008. – **245**, № 6. – P. 1454–1506.
10. *Giacomelli L., Knüpfer H.* A free boundary problem of fourth order: classical solutions in weighted Hölder spaces // Commun. Partial Differ. Equations. – 2010. – **35**, № 10–12. – P. 2059–2091.
11. *Giacomelli L., Gnann M.V., Knüpfer H., Otto F.* Well-posedness for the Navier-slip thin-film equation in the case of complete wetting // J. Differ. Equations. – 2014. – **257**, № 1. – P. 15–81.
12. *Giacomelli L., Gnann M.V., Otto F.* Regularity of source-type solutions to the thin-film equation with zero contact angle and mobility exponent between $3/2$ and 3 // Eur. J. Appl. Math. – 2013. – **24**, № 5. – P. 735–760.
13. *Boutat M., Hilout S., Rakotoson J.-E., Rakotoson J.-M.* A generalized thin-film equation in multidimensional space // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**, № 4. – P. 1268–1286.
14. *Bertsch M., Giacomelli L., Karali G.* Thin-film equations with «partial wetting» energy: existence of weak solutions // Phys. D. – 2005. – **209**, № 1–4. – P. 17–27.
15. *Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* On a fourth-order degenerate parabolic equation: global entropy estimates, existence, and qualitative behavior of solutions // SIAM J. Math. Anal. – 1998. – **2**. – P. 321–342.
16. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Commun. Partial Differ. Equations. – 2001. – **26**, № 9–10. – P. 1509–1557.
17. *Giacomelli L., Shishkov A.* Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow // Indiana Univ. Math. J. – 2005. – **54**, № 4. – P. 1181–1215.
18. *Novick-Cohen A., Shishkov A.* The thin film equation with backwards second order diffusion // Interfaces Free Bound. – 2010. – **12**, № 4. – P. 463–496.
19. *Liang B.* Mathematical analysis to a nonlinear fourth-order partial differential equation // Nonlinear Anal. – 2011. – **74**, № 11. – P. 3815–3828.
20. *Liu C., Tian Y.* Weak solutions for a sixth-order thin film equation // Rocky Mt. J. Math. – 2011. – **41**, № 5. – P. 1547–1565.
21. *Liu C.* Qualitative properties for a sixth-order thin film equation // Math. Model. Anal. – 2010. – **15**, № 4. – P. 457–471.
22. *Dominik John* On Uniqueness of Weak Solutions for the Thin-Film Equation // Journal of Differential Equations. – 2015. – **259**, № 8. – P. 4122–4171.
23. *Bazalii B.V., Degtyarev S.P.* On classical solvability of the multidimensional Stefan problem for convective motion of a viscous incompressible fluid. // Math. USSR Sb. – 1988. – **60**, № 1. – P. 1–17.
24. *Bizhanova G.I., Solonnikov V.A.* On problems with free boundaries for second-order parabolic

- equations // St. Petersburg Math. J. – 2001. – **12**, № 6. – P. 949–981.
25. *Bazaliĭ B.V., Krasnoshchek N.V.* Regularity of solution to a multidimensional free boundary problem for an equation of a porous medium // Siberian Advances in Mathematics. – 2003. – **13**, № 3. – P. 1–53.
 26. *Goulaouic C., Shimakura N.* Regularite holderienne de certains problemes aux limites elliptiques degeneres // Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1983. – **X**, № 1. – P. 79–108.
 27. *Bazaliĭ B.V., Degtyarev S.P.* A boundary value problem for elliptic equations that degenerate on the boundary in weighted Hölder spaces // Sb. Math. – 2013. – **204**, № 7–8. – P. 958–978.
 28. *Triebel H.* Theory of function spaces II – Reprint of the 1992 edition. Modern Birkhauser Classics. Basel: Birkhauser (2010).
 29. *Solonnikov V.A.* Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of Navier–Stokes equations – In: Boundary value problems of mathematical physics. Part 1, Collection of articles, Trudy Mat. Inst. Steklov. – **70**. – P. 213–317. – Nauka, Moscow–Leningrad (1964).
 30. *Golovkin K.K.* On equivalent normalizations of fractional spaces – In: Automatic programming, numerical methods and functional analysis, Trudy Mat. Inst. Steklov. – **66**. – P. 364–383. – Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad (1962) (Russian); English transl. Amer. Math. Soc. Transl. **81**. – P. 257–280. – 1969.
 31. *Simon L.* Schauder estimates by scaling // Calc. Var. Partial Differ. Equ. – 1997. – **5**, № 5. – P. 391–407.
 32. *Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N.* Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type – Second edn. Nauka, Moscow, 1973.
 33. *Solonnikov V.A.* General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. – II. (Russian). Trudy Mat. Inst. Steklov (Proc. Steklov Inst. Math.) – **92**. – P. 233–297. – 1966.
 34. *Stein E.M.* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. – Princeton Mathematical Series, no. 30, pp. xiv+290. Princeton University Press, Princeton (1970).
 35. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems – Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. – **16**. – Birkhauser. – 1995.
 36. *Ladyzhenskaja O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Translations of Mathematical Monographs. – **23**. – American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968, xi+648 pp.

С. П. Дегтярев

Весовые пространства Гельдера для параболических моделей математической физики I. Некоторые вспомогательные свойства.

Настоящая статья посвящена изучению некоторых весовых пространств Гельдера. Эти пространства сконструированы таким образом, чтобы служить классами корректности для уравнений тонких пленок в их многомерной постановке в классах гладких функций. Эти пространства могут служить также гладкими классами корректности для других моделей математической физики с вырождением на границе области определения. В данной статье мы приводим доказательства некоторых полезных свойств этих пространств.

Ключевые слова: весовые пространства Гельдера, интерполяционные неравенства, вырождающиеся параболические уравнения.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», г. Донецк
degtyar@i.ua

Received 24.05.17

УДК 531.38

©2017. С. П. Дегтярев, О. Н. Швидкий

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

В работе рассматривается начальная задача для обобщенного уравнения теплопроводности с дробным оператором Лапласа. Целью данной работы является исследование модельной задачи с нулевыми начальными данными. Общий случай может быть сведен к данной модельной задаче.

Ключевые слова: дробное уравнение теплопроводности, пространства Гельдера, мультипликатор.

1. Введение. В последние годы возник значительный интерес к дифференциальным уравнениям с дробными производными благодаря их приложениям в моделях хаотической динамики, аномальной диффузии, аномальной теплопроводности, распространения волн в пористых средах, а также во многих других областях. В монографии [1] встречаются, например, такие уравнения:

$$D_t^\alpha u(t, x) = \Delta u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad \alpha > 0,$$

где Δ – оператор Лапласа. Задача Коши для этого уравнения представляет дробную модель субдиффузионных процессов в случае $0 < \alpha < 1$, и процессы, промежуточные между диффузией и распространением волн, в случае $1 < \alpha < 2$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = D_0^\beta u(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad \beta > 0,$$

где $D_0^\beta f(x) := \frac{1}{d_{n,l}(\beta)} \int_{R^n} \frac{\Delta_y^l f(x)}{|y|^{n+\alpha}} dy$ ($0 < \alpha < l$, l – целое положительное число,

Δ_y^l – конечная разность порядка l по y) – дробная производная по x . Это уравнение моделирует процессы перехода, возникающие в различных прикладных науках. В одномерном случае при условии $0 < \beta \leq 2$ это уравнение описывает симметрические диффузионные процессы Леви–Феллера.

Стоит также упомянуть о системе Навье–Стокса. В статье [4] рассматривается начальная задача для обобщенных уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^\alpha u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

где $\alpha > 1/2$, $(x, t) \in R^3 \times (0; \infty)$, $u(x, t) = (u^1(x, t), u^2(x, t), u^3(x, t))$ – неизвестные функции, $p(x, t)$ – неизвестная скалярная функция и $u_0(x)$ – данная векторзначная функция, удовлетворяющая условию свободной дивергенции $\nabla \cdot u_0 = 0$.

Все больше внимания привлекает задача

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u &= f \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned} \right\}. \quad (*)$$

Например, такая задача рассматривается в [2], [3] при следующих допущениях: φ – непрерывна в R^n , f непрерывна в $\overline{R^n \times (0; \infty)}$ и u $2s$ -раз непрерывно дифференцируема в $R^n \times (0; \infty)$ и непрерывна в $\overline{R^n \times (0; \infty)}$.

В статье [3] изучается существование, единственность, начальные следы, а также априорные оценки и регулярность решений дробного уравнения теплопроводности с нулевой правой частью. При этом ставится ограничение в виде неотрицательности решений. В конце статьи также упоминается уравнение с ненулевой правой частью, где $f \in L^1(R^n \times (0, T))$.

В статье [6] доказывается единственность решения задачи (*) с нулевой правой частью при условии, что начальные данные имеют медленный рост на бесконечности.

2. Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим задачу Коши такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u &= f \\ u(x, 0) &= \varphi(x) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где

$$f(x, t) \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}, \quad \varphi(x) \in H^{2s+\alpha}, \quad (2)$$

$\alpha \in (0, 1)$, $s > 0$, $\max(\alpha, \frac{\alpha}{2s}) < 1$, Δ – оператор Лапласа.

Мы используем следующие обозначения:

H^α и $H^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}$ – пространства Гёльдера. Более подробно:

H^α – банахово пространство непрерывных функций с конечной нормой

$$|u|^{(\alpha)} = \langle u \rangle^{(\alpha)} + |u|^{(0)},$$

где

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x - x'| \leq 1}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$|u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|, \quad \Omega - \text{область в } R^n.$$

$H^{\alpha, \frac{\alpha}{2s}}$ – банахово пространство непрерывных функций с конечной нормой

$$|u|^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} = \langle u \rangle_x^{(\alpha)} + \langle u \rangle_t^{(\frac{\alpha}{2s})} + |u|^{(0)},$$

где

$$\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x, t), (x', t) \in Q_T \\ |x - x'| \leq 1}} \frac{|u(x, t) - u(x', t)|}{|x - x'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\langle u \rangle_{t, Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x, t), (x', t') \in Q_T \\ |t - t'| \leq 1}} \frac{|u(x, t) - u(x', t')|}{|t - t'|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$|u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u|,$$

Q_T – цилиндр $\Omega \times (0, T)$, T – некоторое число.

$$|u|^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} = |u|^{(2s+\alpha)} = |u_t|^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |(-\Delta)^s u|^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |u|^{(0)}.$$

Дробную степень оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ в евклидовом пространстве R^n называют также дробной производной Рисса. Ее можно определить следующим образом:

$$(-\Delta)^\alpha u := F^{-1}[|\xi|^{2\alpha} F[u](\xi)](x) = C(n, \alpha) \int_{R^n} \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{n+2\alpha}} dy,$$

где $F[u] = \tilde{u} = C(n) \int_{R^n} u(x, t) e^{-ix\xi} dx$ – преобразование Фурье по x .

В нашей работе мы покажем, что задача (1) имеет единственное решение из класса $H^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$, причем справедливо неравенство

$$|u|_{R^n \times (0, T)}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C_T \left(|f|_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |\varphi|_{R^n}^{(2s+\alpha)} \right) \quad (3)$$

для любого $T > 0$, причем константа C_T зависит от T . Здесь и ниже $R_+^{n+1} = R^n \times (0; \infty)$

В данной статье мы ограничимся модельным случаем $u(x, 0) = 0, f(x, 0) = 0$. В силу уравнения системы (1) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

Имеем следующую задачу Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^s u &= f \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

$f \in C^\infty(R^{n+1})$, финитная в R^{n+1} (по t в смысле:

f обращается в нуль при $t > 2T$) и удовлетворяет условию (2). (5)

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $s > 0$, $\max(\alpha, \frac{\alpha}{2s}) < 1$. Тогда для любых f , удовлетворяющих условию (5) задача (1) имеет единственное решение $u \in H^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$, причем

$$|u|_{R^n \times (0, T)}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} \leq C |f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} \quad (6)$$

с постоянной C , не зависящей от f .

3. Доказательство Теоремы 1.

Доказательство. Обозначим $R_+^{n+1} = R^n \times (0, +\infty)$. Продолжим функции $u(x, t)$ и $f(x, t)$ нулем в области $t < 0$ и совершим в (4) преобразование Фурье по x и по t . Уравнение (4) приобретет вид:

$$i\lambda\tilde{u} + |\xi|^{2s}\tilde{u} = \tilde{f},$$

где

$$\tilde{f}(\xi, p) = C(n) \int_{R^{n+1}} f(x, t) e^{-ix\xi - it\lambda} dx dt.$$

Отсюда,

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{i\lambda + |\xi|^{2s}}. \quad (7)$$

Решение (4) существует, так как $u = F^{-1}[\tilde{u}] = F^{-1}\left[\frac{\tilde{f}}{i\lambda + |\xi|^{2s}}\right] = \int_{R^{n+1}} \frac{\tilde{f}}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda$ и последний интеграл конечен из-за условий (5).

Решение (4), также, удовлетворяет следующему неравенству:

$$|u(x, t)| \leq A(t) + B|x|^{2s-\sigma} \quad \forall (x, t) \in R^n \times [0, +\infty], \quad (**)$$

где $A(t) = c(\nu + \sqrt{t})$ такая, что: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = 0$, $c \geq 1, B, \sigma > 0$.

Для доказательства единственности решения (4) мы будем опираться на Теорему 3.6 [6]. Для этого необходимо, чтобы функция u удовлетворяла Определениям 3.1 и 3.2 [6].

Сначала покажем, что $u(x, t) \in C(R_+^{n+1})$. Преобразование Фурье финитной функции – функция аналитическая ([7], с. 158), которая с необходимостью является непрерывной: $\tilde{f} \in C(R^{n+1})$. Значит $\frac{\tilde{f}(\xi, \lambda)}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} \in C(R^{n+1} \times R^{n+1})$. Так как f – финитна, то она абсолютно интегрируема в R^{n+1} , откуда следует, что $\tilde{f}(y) \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$ ([8], с. 403). Поэтому $\frac{\tilde{f}(\xi, \lambda)}{i\lambda + |\xi|^{2s}}$ монотонна и стремится к нулю при $|(\xi, \lambda)| \rightarrow \infty$;

$\int_{\mu_1 \eta_1}^{\mu_2 \eta_2} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda$ ограничена как функция переменных $\mu_1, \mu_2, \eta_1, \eta_2$ и x, t на множестве $R^{n+1} \times R^{n+1}$. На основании признака равномерной сходимости интегралов $\int_{R^{n+1}} \frac{\tilde{f}}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda$ равномерно сходится на множестве R^{n+1} . Отсюда следует, что $u \in C(R^{n+1}) \subset C(R_+^{n+1})$ ([8], с. 313).

Аналогично, $u'_t(x, t) = \int_{R^{n+1}} \frac{i\lambda \tilde{f}(\xi, \lambda)}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda$ непрерывна в $R_+^{n+1} \quad \forall x \in R^n$, т.е. $u(x, t) \in C^1(0; \infty) \quad \forall x \in R^n$.

Далее покажем, что $(-\Delta)^s u$ сходится $\forall (x, t) \in R_+^{n+1}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j \partial x_k} \int_{R^{n+1}} \frac{\tilde{f}(\xi, \lambda)}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda = - \int_{R^{n+1}} \frac{\xi_j \xi_k \tilde{f}(\xi, \lambda)}{i\lambda + |\xi|^{2s}} e^{ix\xi + it\lambda} d\xi d\lambda.$$

Такой интеграл непрерывен, исходя из вышеследующих рассуждений. Т.е. $u \in C^2(R^n)$. Фиксируем $t \in (0; \infty)$. $u(x, t)$ удовлетворяет (**), поэтому, в силу Теоремы 2.2 [6], $(-\Delta)^s u(x, t)$ сходится $\forall x \in R_n$. Так как t – произвольное из $(0; \infty)$, то $(-\Delta)^s u$ сходится $\forall (x, t) \in R_+^{n+1}$.

Теперь рассмотрим функцию $\psi = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, где u_1, u_2 какие-нибудь два решения задачи (4). Из доказанного выше следует, что $\psi \in C(R_+^{n+1})$, $\psi(x, \cdot) \in C^1(0; \infty) \forall x \in R^n$, $(-\Delta)^s \psi$ сходится $\forall (x, t) \in R_+^{n+1}$. Кроме того, $\frac{\partial \psi}{\partial t} + (-\Delta)^s \psi = 0$ и $\psi(x, 0) = 0 \forall x \in R^n$. Функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет Определениям 3.1 и 3.2 из [6], а также подчиняется условию (**). Функция $\psi_1(x, t) \equiv 0$ также удовлетворяет тем же самым условиям, а значит, по Теореме 3.6 (iii) [6] $\psi(x, t) = \psi_1(x, t) \equiv 0$. То есть $u_1 \equiv u_2$.

Для оценки решения нам необходимо оценивать u_t и $(-\Delta)^s u$. Для этого найдем сначала их образы Фурье, пользуясь (6) и известными свойствами преобразования Фурье.

$$\tilde{u}_t = i\lambda \tilde{u} = \frac{i\lambda}{i\lambda + |\xi|^{2s}} \cdot \tilde{f} = \tilde{m}_1 \cdot \tilde{f}, \quad \text{где} \quad \tilde{m}_1 = \frac{i\lambda}{i\lambda + |\xi|^{2s}}, \quad (8)$$

$$(-\Delta)^s u = |\xi|^{2s} \tilde{u} = \frac{|\xi|^{2s}}{i\lambda + |\xi|^{2s}} \cdot \tilde{f} = \tilde{m}_2 \cdot \tilde{f}, \quad \text{где} \quad \tilde{m}_2 = \frac{|\xi|^{2s}}{i\lambda + |\xi|^{2s}}. \quad (9)$$

Функции $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ из (9), (10) играют роль мультипликаторов из Теоремы 2.1 [5].

На основании Теоремы 2.1 и Леммы 2.2 [5] сформулируем следующую Лемму.

Лемма 1. Пусть $\tilde{m} : R^{n+1} \rightarrow C$ – измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условиям

$$\exists p \in (1, 2] : \quad \sum_{\alpha} \|D^{\alpha}(\tilde{\mathcal{M}}_j)\|_{p, R^{n+1}} \leq \mu < \infty \quad \forall j = Z = \{0, \pm 1, \dots\}, \quad (10)$$

где $D^{\alpha} u = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n} \partial_{\lambda}^{\alpha_{n+1}}$ и каждое α_k – нуль или один (т.е. $\alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$); $\tilde{\mathcal{M}}_j(\xi, \lambda) = \tilde{m}(2^j \xi, 2^{j/\alpha} \lambda) \chi(\xi, \lambda)$ и $\chi(\xi, \lambda) = \theta(\rho(\xi, \lambda))$, $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ – бесконечнодифференцируемая функция, равная 1 на интервале $[\frac{1}{2}, 2]$ и нулю на множествах $[0, \frac{1}{4}]$ и $[4, \infty]$, а ρ определено соотношением

$$\varrho((x, t), (x', t')) = |x - x'| + |t - t'|^{\frac{1}{2s}}.$$

Тогда для $m = F^{-1}(\tilde{m})$ и любой функции $u \in \dot{C}^{\infty}(R^{n+1})$ справедливо неравенство:

$$\langle \tilde{m} * u \rangle_{R^{n+1}}^{(\gamma, \alpha\gamma)} \leq c(n, \gamma, \alpha) \cdot \mu \cdot \langle u \rangle_{R^{n+1}}^{(\gamma, \alpha\gamma)}$$

с постоянной c , зависящей только от n, γ и α ; $\alpha, \gamma \in (0, 1)$. ($\dot{C}^{\infty}$ – пространство бесконечнодифференцируемых функций с компактным носителем).

Легко проверить, что мультипликаторы $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ обладают свойством: $\tilde{m}_1(a\xi, a^{2s}\lambda) = \tilde{m}_1(\xi, \lambda)$, $\tilde{m}_2(a\xi, a^{2s}\lambda) = \tilde{m}_2(\xi, \lambda) \forall a > 0$, откуда следует, что $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ – однородные функции (ξ, λ) нулевой степени. Поэтому $\tilde{m}_i(2^j \xi, 2^{2sj} \lambda) =$

$= \tilde{m}_i(\xi, \lambda)$, $i = 1, 2$, и для выполнения условия Леммы 1 нужно проверить два неравенства: $\sum_{\alpha} \|D^{\alpha}(\tilde{\mathcal{M}}_i)\|_{p, R^{n+1}} \leq \mu_i < \infty$, $i = 1, 2$.

Найдем последовательно несколько производных $\tilde{\mathcal{M}}_1(\xi, \lambda) = \tilde{m}_1(\xi, \lambda) \cdot \chi(\xi, \lambda)$. Для удобства дифференцирования запишем $\tilde{m}_1$ в виде $\tilde{m}_1(\lambda, \xi) = n_1(\lambda, f(|\xi|))$, где $f(|\xi|) = |\xi|^s$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \tilde{\mathcal{M}}_1 &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\tilde{m}_1(\lambda, \xi) \cdot \chi(\lambda, \xi)) = s \frac{\partial n_1}{\partial f} \cdot |\xi|^{s-2} \cdot \xi_i \cdot \chi + \tilde{m}_1 \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \tilde{\mathcal{M}}_1 &= s^2 \frac{\partial^2 n_1}{\partial f^2} |\xi|^{2s-4} \cdot \xi_i \xi_j \cdot \chi + s \cdot (s-2) \frac{\partial n_1}{\partial f} \cdot |\xi|^{s-4} \cdot \xi_i \xi_j \cdot \chi + s \frac{\partial n_1}{\partial f} |\xi|^{s-2} \times \\ &\times \xi_i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \xi_i} + \tilde{m}_1 \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi_i \partial \xi_j}, \\ \frac{\partial^3}{\partial \xi_i \partial \xi_j \partial \xi_k} \tilde{\mathcal{M}}_1 &= s^3 \frac{\partial^3 n_1}{\partial f^3} \cdot |\xi|^{3s-6} \cdot \xi_i \xi_j \xi_k \cdot \chi + s^2 \cdot (2s-4) \frac{\partial^2 n_1}{\partial f^2} \cdot |\xi|^{2s-6} \cdot \xi_i \xi_j \xi_k \times \\ &\times \chi + s^2 \frac{\partial^2 n_1}{\partial f^2} |\xi|^{2s-4} \cdot \xi_i \xi_j \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \xi_k} + s^2 (s-2) \frac{\partial^2 n_1}{\partial f^2} \cdot |\xi|^{2s-6} \cdot \xi_i \xi_j \xi_k \cdot \chi + s(s-2) \times \\ &\times (s-4) \frac{\partial n_1}{\partial f} |\xi|^{s-6} \cdot \xi_i \xi_j \xi_k \cdot \chi + s(s-2) \frac{\partial n_1}{\partial f} |\xi|^{s-4} \cdot \xi_i \xi_j \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \xi_k} \end{aligned}$$

и т.д.

Найдем производные n_1 по f .

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial f} &= -\frac{2i\lambda f}{(i\lambda + f^2)^2} = -\frac{2i\lambda}{(i\lambda + f^2)^2} \cdot |\xi|^s, \\ \frac{\partial^2 n_1}{\partial f^2} &= \frac{6i\lambda f^2 + 2\lambda^2}{(i\lambda + f^2)^3} = \frac{6i\lambda |\xi|^{2s} + 2\lambda^2}{(i\lambda + f^2)^3}, \\ \frac{\partial^3 n_1}{\partial f^3} &= \frac{-24\lambda^2 f + 12i\lambda f^2 - 36i\lambda f^3}{(i\lambda + f^2)^4} = \left[\frac{-24\lambda^2 + 12i\lambda |\xi|^s - 36i\lambda |\xi|^{2s}}{(i\lambda + f^2)^4} \right] \cdot |\xi|^s, \\ \frac{\partial^4 n_1}{\partial f^4} &= \frac{-24i\lambda^3 - 24\lambda^2 f + (108\lambda - 24\lambda^2 + 192\lambda^2)f^2 + (24i\lambda - 96i\lambda)f^3 + (36i\lambda - 108i\lambda)f^4}{(i\lambda + f^2)^5} = \frac{-24i\lambda^3 - 24\lambda^2 |\xi|^s + \dots}{(i\lambda + f^2)^5} \end{aligned}$$

...

Видно, что производные n_1 по f нечетного порядка уменьшают порядок особенности $D^{\alpha} \tilde{\mathcal{M}}_1$ за счет множителя $|\xi|^s$.

Производные $\tilde{\mathcal{M}}_1(\xi, \lambda)$ имеют особенность только при $\xi = 0$ и в окрестности нуля справедливо следующее неравенство:

$$|D^{\alpha} \tilde{\mathcal{M}}_1| \leq c_{\alpha} |\xi|^{2s-|\alpha|}, \quad (11)$$

где $|\alpha|$ – порядок производной по ξ (производные по λ не увеличивают порядок особенности).

Проверим неравенство:

$$\sum_{\alpha} \|D^{\alpha}(\tilde{\mathcal{M}}_1)\|_{p, R^{n+1}} \leq \mu_1 < \infty. \quad (12)$$

$$\|D^{\alpha} \tilde{\mathcal{M}}_1\|_{p, R^{n+1}} = \left(\int_{\omega} |D^{\alpha} \tilde{\mathcal{M}}_1|^p d\xi d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(c_{\alpha} \int_{\omega} |\xi|^{(2s-|\alpha|)p} d\xi d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(c_\alpha \int_{\omega} \frac{1}{|\xi|^{(|\alpha|-2s)p}} d\xi d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\
&\leq \left\{ \omega = \{(\xi, \lambda) | \rho(\xi, \lambda) \in [\frac{1}{4}, 4]\}, \text{ т.е. } \frac{1}{4} \leq |\xi| + |\lambda|^{\frac{1}{2s}} \leq 4 \right. \\
&\quad \left. 0 \leq \left(\frac{1}{4} - |\xi|\right)^{2s} \leq |\lambda| \leq (4 - |\xi|)^{2s} \leq 4^{2s} \right\} \\
&\leq \left(c_\alpha \int_{-4^{2s}}^{4^{2s}} \int_{|\xi| \leq 4} \frac{1}{|\xi|^{(|\alpha|-2s)p}} d\xi d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \left(c_\alpha \int_{|\xi| \leq 4} \frac{1}{|\xi|^{(|\alpha|-2s)p}} d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Максимальный показатель степени $|\xi|$ в знаменателе $-(n-2s)p$ и очевидно, что можно подобрать $p \in (1, 2]$ так, чтобы $(n-2s)p < n$. А значит последний интеграл сходится и неравенство (13) выполняется.

Далее, находя производные $\widetilde{\mathcal{M}}_2(\xi, \lambda) = \widetilde{m}_2(\xi, \lambda) \cdot \chi(\xi, \lambda)$, получаем, что они имеют особенности тех же порядков, что и $\widetilde{\mathcal{M}}_1$. Следовательно, неравенство (13) выполняется и для $\widetilde{\mathcal{M}}_2$:

$$\sum_{\alpha} \|D^\alpha(\widetilde{\mathcal{M}}_2)\|_{p, R^{n+1}} \leq \mu_2 < \infty. \quad (13)$$

Условие Леммы 1, стало быть, выполняется, следовательно

$$\langle u_t \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} = \langle m_1 * f \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} \leq c_1 \mu_1 \langle f \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}, \quad (14)$$

$$\langle (-\Delta)^s u \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} = \langle m_2 * f \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} \leq c_2 \mu_2 \langle f \rangle_{R_+^n}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}. \quad (15)$$

Для оценки $|u|_{R^n \times (0, T)}^{2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s}}$ нам еще необходимо оценить $|u|^{(0)}$, $|u_t|^{(0)}$ и $|(-\Delta)^s u|^{(0)}$.

Сделаем это:

$$|u_t|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} = \max_{R^n \times (0, T)} \frac{|u_t(x, t) - u_t(x, 0)|}{|t - 0|^{\frac{\alpha}{2s}}} \cdot t^{\frac{\alpha}{2s}} \leq T^{\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{t, R^n \times (0, T)}^{(\frac{\alpha}{2s})}, \quad (16)$$

$$|u|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} = \left| \int_0^t u_t dt \right|^{(0)} \leq T \cdot |u_t|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} \leq T^{1+\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{t, R^n \times (0, T)}^{(\frac{\alpha}{2s})}. \quad (17)$$

Из уравнения (4) $(-\Delta)^s u = f - u_t$, поэтому

$$\begin{aligned}
|(-\Delta)^s u|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} &= |f - u_t|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} \leq |f|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} + |u_t|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} \leq \\
&\leq |f|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} + T^{\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{t, R^n \times (0, T)}^{(\frac{\alpha}{2s})} \leq |f|_{R^n \times (0, T)}^{(0)} + T^{\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{R^n \times (0, T)}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} \leq \\
&\leq c(|f|_{R_+^{n+1}}^{(0)} + \langle f \rangle_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}) = c|f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}.
\end{aligned} \quad (18)$$

$\langle u_t \rangle_{t, R^n \times (0, T)}^{(\frac{\alpha}{2s})} \leq c \langle u_t \rangle_{R^n \times (0, T)}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}$ справедлива, в силу эквивалентности $\langle u \rangle_{x, Q_T}^{(\gamma)} + \langle u \rangle_{t, Q_T}^{(\frac{\gamma}{2s})}$ и $\langle u \rangle_{Q_T}^{(\gamma, \frac{\gamma}{2s})}$.

Итак, учитывая (14)–(18), получаем

$$\begin{aligned}
|u|_{R^n \times (0,T)}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} &= |u_t|_{R^n \times (0,T)}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |(-\Delta)^s u|_{R^n \times (0,T)}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + |u|_{R^n \times (0,T)}^{(0)} \\
&\leq |u_t|_{R^n \times (0,T)}^{(0)} + \langle u_t \rangle_{x, R_+^{n+1}}^{(\alpha)} + \langle u_t \rangle_{t, R_+^{n+1}}^{(\frac{\alpha}{2s})} + \\
&+ |(-\Delta)^s u|_{R^n \times (0,T)}^{(0)} + \langle (-\Delta)^s u \rangle_{x, R_+^{n+1}}^{(\alpha)} + \langle (-\Delta)^s u \rangle_{t, R_+^{n+1}}^{(\frac{\alpha}{2s})} + |u|_{R^n \times (0,T)}^{(0)} \leq \\
&\leq T^{\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{t, R_+^{n+1}}^{(\frac{\alpha}{2s})} + c_1 \langle u_t \rangle_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + c_2 |f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + c_3 \langle (-\Delta)^s u \rangle_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + \\
&+ T^{1+\frac{\alpha}{2s}} \langle u_t \rangle_{t, R_+^{n+1}}^{(\frac{\alpha}{2s})} \leq c_1 \langle f \rangle_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} + c_2 |f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})} \leq c |f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}, \text{ т. е.} \\
|u|_{R^n \times (0,T)}^{(2s+\alpha, \frac{2s+\alpha}{2s})} &\leq c |f|_{R_+^{n+1}}^{(\alpha, \frac{\alpha}{2s})}
\end{aligned}$$

и Теорема 1 доказана. $\square$

1. Umarov, S.R. Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols. – Springer, 2015.
2. Baaske F, Schmeisser H–J. On a generalized nonlinear heat equation in Besov and Triebel–Lizorkin spaces. – Mathematische Nachrichten, 2017;00:1–21.
3. Matteo Bonforte, Yannick Sire, Juan Luis Vazquez Optimal existence and uniqueness theory for the fractional heat equation // Nonlinear Analysis. – 2017. – **153**. – P. 142–168.
4. Deng C., Yao X. Well-posedness and ill-posedness for the 3D generalized Navier–Stokes equations in $\dot{F}_{\frac{3}{\alpha-1}}^{-\alpha, r}$ // Discrete and continuous dynamical systems. – February 2014. – **34**, no. 2.
5. Ladyzhenskaya O.A. A theorem on multipliers in nonhomogeneous Hölder Spaces and some of its applications // Journal of Mathematical Sciences. – 2003. – **115**, no. 6.
6. Greco A., Iannizzotto A. Existence and convexity of solutions of the fractional heat equation // Communications on pure and applied analysis. – November 2017. – **16**, no. 6. – P. 2201–2226.
7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики // М., «Наука», 1971. – 512 с.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – М.: «Высшая шк.», 1981. – Т. 2. – 584 с.

S. P. Degtyarev, O. N. Shvydkyi

Solvability of Cauchy problem for the generalized heat equation with a fractional operator of laplace in the Helder functions spaces.

The initial problem for the generalized heat equation with a fractional Laplace operator is considered. The aim of this paper is to study a model problem with zero initial data. The general case can be reduced to this model problem.

Keywords: fractional heat equation, Helder spaces, multiplier.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
oshvid@ukr.net

Получено 13.11.17

УДК 517.5

©2017. Д. А. Зарайский

О МНОЖЕСТВАХ, НА КОТОРЫХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СВЁРТКИ ДОПУСКАЮТ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

В работе исследуется вопрос, при каких условиях на множество $A \subset \mathbb{R}^n$ произвольная функция из $L^2(A)$ продолжается до решения $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ уравнения свёртки $f * T = 0$. T здесь – радиальная функция вида $T(x) = (r^2 - |x|^2)_+^s \varphi(|x|^2)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(r^2) \neq 0$. Показано, что для выпуклого множества A ответ зависит от диаметра A (если последний отличен от $2r$).

Ключевые слова: уравнения свёртки, периодичность в среднем.

1. Введение. Будем обозначать $B_r(a)$ – открытый шар радиуса r с центром в точке a в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\overline{B}_r(a)$ – замкнутый шар, полагаем также $B_r = B_r(0)$, $\overline{B}_r = \overline{B}_r(0)$. Пусть, далее, $\mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^n)$ – пространство радиальных, т.е. инвариантных относительно группы вращений $SO(n)$, распределений на $\mathbb{R}^n$, $\natural: \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^n)$ – операция радиализации (усреднения по $SO(n)$); распределение $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $\mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^n)$ тогда, и только тогда, когда $f^\natural = f$; обозначим также $\mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'_b(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – пространство радиальных распределений с компактными носителями. Для ненулевого распределения $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ обозначим $r(T)$ – радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель T .

Для открытого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ область определения свёртки $f * T$ – множество $\{x \in \mathbb{R}^n: x - \text{supp } T \subset \mathcal{U}\}$ (очевидно, открытое). Если $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}^n)$ и $r = r(T)$, то область определения $f * T$ содержит множество

$$\mathcal{U}_r = \{x \in \mathcal{U}: \overline{B}_r(x) \subset \mathcal{U}\}.$$

Последнее также открыто и совпадает со всей областью определения $f * T$, в случаях, когда $\text{supp } T = \overline{B}_r$, либо когда $\mathcal{U}$ выпукло. Для открытого множества $\mathcal{U}$ через $\mathcal{D}'_T(\mathcal{U})$ будем обозначать множество распределений $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$, удовлетворяющих однородному уравнению свёртки $f * T = 0$ на $\mathcal{U}_{r(T)}$; $C^\infty_T(\mathcal{U}) = \mathcal{D}'_T(\mathcal{U}) \cap C^\infty(\mathcal{U})$.

Если $\mathcal{U}$ – выпуклое открытое множество, то, согласно аппроксимационной теореме Хёрмандера–Мальгранжа [1, т. 16.4.1], любая функция из $C^\infty_T(\mathcal{U})$ может быть аппроксимирована в $C^\infty(\mathcal{U})$ функциями из $C^\infty_T(\mathbb{R}^n)$ (точнее, линейными комбинациями принадлежащих $C^\infty_T(\mathbb{R}^n)$ функций вида $P(\cdot)e^{i\langle \cdot, y \rangle}$, $y \in \mathbb{C}^n$, P – полином). Если $\mathcal{U}_r = \emptyset$, то, по определению, $C^\infty_T(\mathcal{U}) = C^\infty(\mathcal{U})$.

Таким образом, если A – компактное выпуклое множество, не содержащее ни одного шара радиуса r , то из теоремы Хёрмандера–Мальгранжа вытекает (подробнее – см. доказательство леммы 2 ниже), что множество ограничений на A всех функций из $C^\infty_T(\mathbb{R}^n)$ плотно в $C(A)$.

В связи с этим естественно спросить, когда множество ограничений на A решений уравнения свёртки $f * T = 0$ совпадает с некоторым пространством функций

на A . Так для случая пространства L^2 возникает следующий вопрос: при каких условиях на $A \subset \mathbb{R}^n$ множество ограничений на A функций из $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с $L^2(A)$?

В настоящей работе мы изучаем уравнение свёртки $f * T = 0$ со свёртывателем T вида

$$T(x) = (r^2 - |x|^2)_+^s \varphi(|x|^2), \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi(r^2) \neq 0, \quad (1)$$

где $r > 0$, $s > -1$ (очевидно, $r(T) = r$ для таких T). Классы решений таких уравнений, в частности, класс функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса, изучались во многих работах, см., например, [2, 3] и приведённую там библиографию.

Мы устанавливаем, что для выпуклых множеств A ответ на указанный вопрос зависит от диаметра A (в случае, если последний отличен от $2r$). Полученные результаты частично обобщают результаты предыдущей работы автора [4], где изучался случай функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса, отвечающий $T = \chi_{B_r}$ (χ_{B_r} – индикатор шара B_r) и допускающий более явную конструкцию продолжения.

2. Формулировки основных результатов.

Теорема 1. Пусть распределение T имеет вид (1) и диаметр измеримого множества A менее $2r$. Тогда произвольная $f_A \in L^2(A)$ продолжается до функции $f \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Значение $2r$ является в теореме 1 критическим: следующая теорема показывает, что для множеств большего диаметра такого продолжения может не существовать даже в классе обобщённых функций.

Теорема 2. Если внутренность $\mathring{A}$ множества A содержит две точки, удалённые на расстояние $2r$, и a – середина отрезка, соединяющего эти точки, то существует непрерывная функция f_A на A , не продолжимая до $f \in \mathcal{D}'_T(B_{r+\varepsilon}(a))$ (в том смысле, что $f = f_A$ на $B_{r+\varepsilon}(a) \cap \mathring{A}$) ни для какого $\varepsilon > 0$.

В случае, когда A – выпуклое множество, теоремы 1 и 2 показывают, что возможность продолжения определяется диаметром множества A (если последний отличен от $2r$):

Следствие. Пусть распределение T имеет вид (1), и множество $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и не содержится ни в какой гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если диаметр A меньше $2r$, множество

$$\{f|_A : f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), f * T = 0\} \quad (2)$$

совпадает с $L^2(A)$. Если диаметр A больше $2r$, множество (2) отлично от $L^2(A)$.

Таким образом, если A – замкнутое выпуклое множество положительной меры и диаметра больше $2r$, не содержащее ни одного шара радиуса r , то множество ограничений на A всех функций из $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(A)$, но не совпадает с ним.

3. Некоторые вспомогательные утверждения. Нам потребуются распределения $\chi_+^s \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, однородные степени $s \in \mathbb{C}$, определяемые формулой $\chi_+^s = x_+^s / \Gamma(s+1)$ ($x_+^s = x^s$ при $x \geq 0$, и $x_+^s = 0$ при $x < 0$, Γ – гамма-функция) при $\operatorname{Re} s > -1$ и аналитическим продолжением по s для остальных значений s . Как известно, $\chi_+^p * \chi_+^q = \chi_+^{p+q+1}$, $\chi_+^{s'} = \chi_+^{s-1}$, $x\chi_+^s(x) = (s+1)\chi_+^{s+1}(x)$, $\chi_+^{(-1-j)} = \delta_0^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, где δ_0 – дельта-функция Дирака [1, § 3.2]. Обозначим также $x_+^s = \Gamma(s+1)\chi_+^s$ при $s \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$, $\chi_-^s = \check{\chi}_+^s$, $x_-^s = \check{x}_+^s$, $H = ((x+i0)^{-1} + (x-i0)^{-1})/2$ – распределение Гильберта.

Положим для удобства при $j \in \mathbb{Z}$

$$H_j = H^{(-j-1)} \quad \text{при } j \leq -1,$$

$$H_j(x) = \frac{x_j^j}{j!} \ln |x| \quad \text{при } j \in \mathbb{Z}_+,$$

тогда $H_j' \equiv H_{j-1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$; $xH_j(x) = (j+1)H_{j+1}(x)$, $j \neq -1$, $xH_{-1} = 1$.

Если $q \notin \mathbb{Z}$, то, как нетрудно видеть,

$$\chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv c_1 \chi_+^{p+q+1} + c_2 \chi_-^{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{при } p+q \notin \mathbb{Z}, \quad (3)$$

$$\chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv c_1 \chi_+^{p+q+1} + c_2 H_{p+q+1} \pmod{C^\infty(\mathbb{R})} \quad \text{при } p+q \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

где $c_1 = c_1(p, q)$, $c_2 = c_2(p, q)$, константы c_1, c_2 не зависят от срезающей функции $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, равной 1 в окрестности 0; $c_2 \neq 0$, т. к. $(\psi \chi_+^{-2-p}) * \chi_+^p * (\psi \chi_-^q) \equiv \chi_-^q \not\equiv c_1 \chi_+^q \pmod{C^\infty(\mathbb{R})}$ при $q \notin \mathbb{Z}$.

Заметим, что $\chi_+^s \in C^m \Leftrightarrow \operatorname{Re} s > m$, $H_j \in C^m \Leftrightarrow j > m$. Кроме того, при $s \leq m$, $s \notin \mathbb{Z}$ распределения χ_+^{s-j} , χ_-^{s-j} , $j \in \mathbb{Z}_+$ (а также распределения χ_+^{m-j} , H_{m-j} , $j \in \mathbb{Z}_+$) линейно независимы $\pmod{C^m(\mathbb{R})}$. Поэтому, если $s \notin \mathbb{Z}$, для того, чтобы распределение f на интервале $(\alpha, \beta) \ni 0$ имело вид

$$f \equiv a(\cdot)x_+^s + b(\cdot)x_-^s \pmod{C^\infty(\alpha, \beta)}, \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы для сколь угодно больших $N \in \mathbb{N}$ имело место сравнение $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]} (a_j \chi_+^{s+j} + b_j \chi_-^{s+j}) \pmod{C^N(\alpha, \beta)}$; если все $b_j = 0$, то и $b(\cdot)$ в (5) можно выбрать нулевой. Необходимость следует из разложения $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ по формуле Тейлора в нуле, достаточность – из существования для произвольных $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ функций $a(\cdot), b(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которых $a^{(j)}(0) = a_j j! / \Gamma(s+j+1)$, $b^{(j)}(0) = (-1)^j b_j j! / \Gamma(s+j+1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, [1, т. 1.2.6]. Аналогично, если $s \in \mathbb{Z}$, то

$$f \equiv \left(\sum_{j=0}^{-s-1} a_j \delta_0^{(-s-1-j)} + a(\cdot)x_+^{\max\{s,0\}} + \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{-s-1} b_j H^{(-s-1-j)} + b(x)x^{\max\{s,0\}} \ln |x| \right) \pmod{C^\infty(\alpha, \beta)} \quad (6)$$

тогда, и только тогда, когда $f \equiv \sum_{j=0}^{[N-s]} (a_j \chi_+^{s+j} + b_j H_{s+j}) \pmod{C^N(\alpha, \beta)}$ для сколь угодно больших $N \in \mathbb{N}$; если $b_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, то в (6) можно взять $b(\cdot) = 0$.

Лемма 1. Пусть распределение T имеет вид (1). Тогда существует распределение $K \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$, такое, что:

- 1) Ограничение $K - \delta_0$ на шар B_{2r} принадлежит $C^\infty(B_{2r})$.
- 2) Для произвольной функции $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем свёртка $f_0 * K$ принадлежит $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Конструкция распределения K весьма похожа на построение аналогичного распределения в случае $T = \chi_{B_r}$ в леммах 3 и 4 работы [5], за исключением того, что K в [5] определяется условием $K|_{B_{2r}} = \delta_0 - 1/\text{mes } B_r$ однозначно, а в случае T более общего вида в выборе K имеется произвол.

Зафиксируем некоторое положительное $\varepsilon < r$.

Пусть далее распределение T имеет вид (1) с $s = s_0$. Тогда $T_1 \in \mathcal{E}'_1(\mathbb{R})$ – прямой образ распределения T при отображении $\text{pr}_1 = \langle \cdot, e_1 \rangle$ – имеет вид

$$T_1(t) = (r^2 - t^2)_+^{s_0 + (n-3)/2} \varphi_1(t^2), \quad \varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi_1(r^2) \neq 0. \quad (7)$$

Для распределения $F_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, задаваемого следующим образом:

$$F_0 = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1} \pi^{n/2-1} \Gamma(\frac{n}{2})} \delta_0^{(n-1)}, \quad \text{если } n \text{ нечётно,}$$

$$F_0 = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2^{n-1} \pi^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} H^{(n-1)}, \quad \text{если } n \text{ чётно,}$$

имеет место равенство $(F_0(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} = \delta_0$, см., например, [6, гл. II, § 11]. Пусть F_1 – произведение F_0 и гладкой чётной срезающей функции, равной 1 в окрестности 0 и имеющей компактный носитель, тогда $(F_1(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} - \delta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Распределение F_1 и свёртка $F_1 * T_1$ чётны. Пусть η – гладкая функция на вещественной оси с носителем в $[-\varepsilon, \infty)$ и такая, что $\eta(t) + \eta(-t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда распределение $G = (F_1 * T_1) \eta$ гладко на $\mathbb{R} \setminus \{r\}$, и $G(\cdot + r)$ имеет в окрестности нуля вид (5) или (6) с $s = s_0 - (n+1)/2$. Кроме того, $F_1 * T_1 = (G + \check{G})/2$, и, т. к. $(\check{G}(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} = (G(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural}$,

$$((F_1 * T_1)(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} = (G(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural}. \quad (8)$$

Согласно лемме 2 из [7], распределение T_1 имеет фундаментальное решение E_1 с носителем, содержащимся в $[r, \infty)$, гладкое на $\mathbb{R} \setminus (2r\mathbb{Z}_+ + r)$ и такое, что $E_1(\cdot + (2rk + r))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеет в окрестности нуля вид (5) или (6) с $s = -s_0 - (n+1)/2$. Тогда $G * E_1$ гладко на $\mathbb{R} \setminus 2r\mathbb{N}$, и $(G * E_1)(\cdot + 2rk)$, $k \in \mathbb{N}$, имеет в окрестности нуля вид (6) с $s = -n$. Кроме того, $\text{supp } G * E_1 \subset [r - \varepsilon, \infty)$. Положим

$$K = (F_1(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} - ((G * E_1)(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural}. \quad (9)$$

Ввиду тождества $(F(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} * T = ((F * T_1)(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural}$ и (8), $K \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n)$.

По лемме 1 работы [7], вне начала координат $((G * E_1)(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} = u(|x|)$, где $u \in \mathcal{D}'((0, \infty))$ гладко на $(0, \infty) \setminus 2r\mathbb{N}$, и распределение $u(\cdot + 2kr)$, $k \in \mathbb{N}$, имеет

вид (5) или (6) с $s = -(n+1)/2$. Поскольку $((G * E_1)(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} = 0$ на $B_{r-\varepsilon}$, и $(F_1(\langle \cdot, e_1 \rangle))^{\natural} - \delta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, для определённого равенством (9) распределения K выполнено первое утверждение леммы. Для того, чтобы доказать второе утверждение, достаточно проверить, что для любой срезающей функции ψ преобразование Фурье ψK ограничено.

Для произвольного натурального N возьмём гладкую функцию ψ , равную 1 на $B_{2rN+\varepsilon}$ и 0 вне $B_{2r(N+1)-\varepsilon}$. Пусть $K_\psi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ – прямой образ распределения ψK при отображении $\text{pr}_1 = \langle \cdot, e_1 \rangle$. Тогда K_ψ гладко на $\mathbb{R} \setminus 2r \cdot (\mathbb{Z} \cap [-N, N])$, и $K_\psi(\cdot + 2rk)$, $k \in \mathbb{Z} \cap [-N, N]$, имеет вид (6) с $s = -1$. Поэтому преобразование Фурье K_ψ ограничено, и, т. к. $\widehat{\psi K}(\xi) = \hat{K}_\psi(|\xi|)$, то же верно и для ψK . $\square$

Лемма 2. Пусть A – компактное выпуклое множество, не содержащее ни одного шара радиуса r . Тогда множество ограничений на A всех функций из $C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $C(A)$.

Доказательство. Для достаточно малых ε , ε -окрестность множества A также не содержит замкнутого шара радиуса r . Это следует из непрерывности по x функции $\max_{|y| \leq r} \text{dist}(x+y, A)$, не обращающейся в нуль на A . Поэтому утверждение леммы является частным случаем теоремы Хёрмандера–Мальгранжа, для такой окрестности $\mathcal{U}_\varepsilon$ (очевидно, выпуклой) и полунормы $\max_A |f|$ в $C_T^\infty(\mathcal{U}_\varepsilon)$. $\square$

Нам потребуются также следующая лемма, связывающая (C^∞) -волновые фронты $WF(f)$ распределений $f \in \mathcal{D}'_T$ в направлениях, касательных к диаметрально противоположным точкам сферы радиуса $r(T)$. Лемма аналогична результату Е.Т. Quinto [8] для функций с нулевыми интегралами по геодезическим сферам и аналитическим волновым фронтам.

Лемма 3. Пусть $f \in \mathcal{D}'_T(B_R(a))$, $0 < r < R < \infty$, $a, y \in \mathbb{R}^n$, и $|y| = r$. Тогда, если

$$(a - y, cy) \notin WF(f) \quad \text{для } c = \pm 1,$$

то

$$(a + y, cy) \notin WF(f) \quad \text{для } c = \pm 1.$$

Доказательство. Заметим, что прямой образ T_1 распределения T при отображении $\text{pr}_1 = \langle \cdot, e_1 \rangle$ имеет вид (7), и T_1 имеет фундаментальное решение с носителем в $[r, \infty)$, гладкое на $\mathbb{R} \setminus (2r\mathbb{Z}_+ + r)$. С учётом сказанного, далее лемма доказывается по той же схеме, что и [9, лемма 3], где рассмотрен случай, когда $T = \chi_{B_r}$ – индикатор шара. $\square$

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Можно считать, что A – замкнутое выпуклое множество, в противном случае A можно заменить его замкнутой выпуклой оболочкой, что не увеличит его диаметра. Будем считать также, что A не содержится ни в какой гиперплоскости (в противном случае $f_A = 0$ и утверждение теоремы

тривиально). Тогда $\mathring{A}$ – внутренность множества A – непуста, и $\partial A = A \setminus \mathring{A}$ имеет меру 0.

Пусть диаметр A меньше $2r - \varepsilon$. Для распределения K , построенного в лемме 1, имеется гладкая радиальная функция $\varkappa$ на $\mathbb{R}^n$, такая, что $K = \delta_0 + \varkappa$ на $B_{2r-\varepsilon}$. Для $g \in L^2(A)$ будем обозначать g_0 продолжение g нулём до элемента $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\text{supp}(g_0 * (K - \delta_0 - \varkappa)) \subset \text{supp } g_0 + \text{supp}(K - \delta_0 - \varkappa) \subset \text{supp } A + (\mathbb{R}^n \setminus B_{2r-\varepsilon}),$$

и, значит, носитель $g_0 * (K - \delta_0 - \varkappa)$ не пересекается с A . Следовательно, $g_0 * K$ совпадает с $g_0 + g_0 * \varkappa$ в окрестности множества A .

Согласно лемме 2, $g_0 * K \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, поэтому имеем отображение

$$g \mapsto (g_0 * K)|_A = g + (g_0 * \varkappa)|_A \quad (10)$$

из $L^2(A)$ в $L^2(A)$. Свёртка $g_0 * \varkappa$ является непрерывной функцией на $\mathbb{R}^n$ со значениями

$$(g_0 * \varkappa)(x) = \int_A \varkappa(x - y) g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $\varkappa$ ограничена на $\overline{B_{2r-\varepsilon}}$, отображение $g \mapsto (g_0 * \varkappa)|_A$ является компактным оператором в $L^2(A)$ (класса Гильберта–Шмидта). Отображение (10) является суммой тождественного и компактного оператора и поэтому имеет замкнутый в $L^2(A)$ образ конечной коразмерности.

Но по лемме 2 множество ограничений на A функций из $C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $C(A)$ и, следовательно, и в $L^2(A)$. Поэтому можно найти конечный набор функций $h_1, \dots, h_k \in C_T^\infty(\mathbb{R}^n)$, таких, что множество линейных комбинаций

$$(g_0 * K)|_A + c_1 h_1|_A + \dots + c_k h_k|_A, \quad g \in L^2(A), \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C},$$

совпадает с $L^2(A)$, что и доказывает теорему, т. к. $g_0 * K \in \mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^n) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Отметим, что, по сравнению с конструкцией продолжения в теореме 1, для случаев $T = \chi_{B_r}$ и $T = \mu_{S_r}$ (χ_{B_r} – индикатор шара, μ_{S_r} – поверхностная евклидова мера на сфере $\{|x| = r\}$) в работе [4] продолжение строится более явным образом – как линейная комбинация $f_0 * K + c \chi_A * K$, f_0 – продолжение f_A нулём на $\mathbb{R}^n \setminus A$. Кроме того, продолжение в этих случаях возможно и когда диаметр A равен $2r$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $a - y, a + y \in \mathring{A}$ – точки из условия теоремы, $|y| = r$. Для произвольно большого $m \in \mathbb{N}$ положим $f_A(x) = (\langle x - a - y, y \rangle)_+^m$. Тогда $f_A \in C^{m-1}$. Предположим, что $f \in \mathcal{D}'_T(B_{r+\varepsilon}(a))$ совпадает с f_A на $\mathring{A} \cap B_{r+\varepsilon}(a)$. Тогда $(a - y, y), (a - y, -y) \notin WF(f)$, но $(a + y, y) \in WF(f)$, что противоречит лемме 3. $\square$

Для доказательства следствия необходимо заметить только, что если выпуклое множество A не содержится ни в какой гиперплоскости, то $\mathring{A} \neq \emptyset$, и в случае, когда диаметр A больше $2r$, $\mathring{A}$ содержит две точки, удалённые на расстояние $2r$.

1. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.
2. Volchkov V.V. Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. – 454 p.
3. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 672 p.
4. Зарайский Д.А. О множествах, на которых функции с нулевыми интегралами по шарам допускают произвольное поведение // Труды ИПММ. – 2016. – **30**. – С. 46–52.
5. Зарайский Д.А. О продолжении функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – **14**. – С. 83–88.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
7. Зарайский Д.А. Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свёртки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – **12**. – С. 69–75.
8. Quinto E.T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Isr. J. Math. – 1993. – **84**. – P. 353–363.
9. Зарайский Д.А. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **25**. – С. 77–83.

D. A. Zaraisky

On sets on which solutions of convolution equation allow an arbitrary behaviour.

In the paper, the following question is investigated: under what conditions on a set $A \subset \mathbb{R}^n$ can any function from $L^2(A)$ be extended to a solution $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ of the convolution equation $f * T = 0$. Here T is a radial function of the form $T(x) = (r^2 - |x|^2)_+^s \varphi(|x|^2)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(r^2) \neq 0$. It is proved that for a convex set A the answer depends on its diameter (provided it differs from $2r$).

Keywords: convolution equations, mean periodicity.

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 27.10.17

УДК 531.36, 531.38

©2017. Б. И. Коносеви́ч, Ю. Б. Коносеви́ч, Г. В. Мозале́вская

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОТОКОВОЙ МОДЕЛИ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОМОТОРА ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ МОМЕНТЕ НАГРУЗКИ

В основу исследования положена модель синхронного электромотора, включающая дифференциальные уравнения для токов в обмотках ротора. Предполагается, что момент нагрузки является нелинейной функцией угловой скорости ротора. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику синхронного электромотора, имеет счетное число стационарных решений, соответствующих рабочему режиму равномерного вращения ротора. Получено эффективное достаточное условие, при котором любое движение синхронного электромотора с течением времени стремится к одному из этих равномерных вращений.

Ключевые слова: синхронный электромотор, глобальная устойчивость, метод сведения, принцип инвариантности Ла-Салля.

Введение. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) называют *фазовой*, если при записи в нормальном виде ее правая часть периодична по некоторым компонентам фазового вектора (по угловым переменным) [1]. Если автономная фазовая система ОДУ имеет хотя бы одно стационарное решение, то она имеет по крайней мере счетное множество стационарных решений. Они получаются из исходного сдвигами на периоды по угловым переменным. Важной научной и практической задачей является установление условий, при которых любое решение фазовой системы ОДУ стремится с течением времени к одному из стационарных решений, то есть система является *системой градиентного типа* [2]. Если система градиентного типа имеет только одно локально асимптотически устойчивое стационарное решение (с точностью до сдвигов на периоды), то ее называют *глобально устойчивой* [2].

В [1, 3] предложен подход, названный методом сведения и позволяющий вывести свойство глобальной асимптотической устойчивости многомерной фазовой системы ОДУ из свойства глобальной устойчивости одного дифференциального уравнения второго порядка специального вида. Условием глобальной устойчивости этого уравнения является неравенство Ф. Трикоми [4]. Получаемые таким путем критерии глобальной асимптотической устойчивости содержат неопределенные параметры и требуют проверки выполнения частотных неравенств.

В [2] представлена двухтоковая модель синхронного и асинхронного электромотора, в которой изменение токов в обмотках ротора описывается при помощи дифференциальных уравнений. Для двухтоковой модели асинхронного электромотора в [5] получено достаточное условие, при котором любое движение электромотора стремится с течением времени к рабочему режиму равномерного вращения. Момент нагрузки предполагается здесь нелинейной функцией угловой скорости

ротора. Для двухтоковой модели синхронного электромотора условие глобальной устойчивости выведено в [6] с использованием идей метода сведения, при этом момент нагрузки предполагается линейной функцией угловой скорости ротора.

В [7] предложена математическая модель синхронного электромотора, включающая любое число токов в демпферной обмотке. Для случая, когда момент нагрузки является линейной функцией угловой скорости ротора, достаточное условие глобальной устойчивости этой модели найдено в [8].

В настоящей работе этот результат обобщен на случай, когда момент нагрузки является нелинейной функцией угловой скорости ротора. Условие глобальной устойчивости синхронного электромотора сведено к легко проверяемому неравенству Трикоми для одного дифференциального уравнения второго порядка, которое не содержит неопределенных параметров.

1. Математическая модель синхронного электромотора. Электромотор состоит из двух основных частей – статора и ротора. В статоре имеются обмотки, на которые подается переменный электрический ток. Он создает магнитное поле, вектор напряженности которого постоянен по модулю и вращается с постоянной угловой скоростью $\omega > 0$ вокруг оси ротора.

В роторе синхронного электромотора имеются две обмотки – демпферная обмотка и обмотка возбуждения. Демпферная обмотка обычно выполнена в виде «беличьего колеса», то есть в виде двух колец, соединенных перпендикулярными к ним стержнями. Обмотка возбуждения может иметь разную конструкцию и содержит большое число витков электрического провода. На эту обмотку через угольные щетки подается постоянное напряжение.

Динамика синхронного электромотора описывается в [7] системой дифференциальных уравнений с фазовым вектором $(\theta, \dot{\theta}, i_0, i_1, \dots, i_{n_2})$. Здесь i_0 – ток в обмотке возбуждения, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) – токи в стержнях демпферной обмотки, θ – угол между радиус-вектором к стержню с током i_{n_2} и вектором напряженности вращающегося магнитного поля статора, $\dot{\theta}$ – производная угла θ по времени t . Уравнения синхронного электромотора содержат следующие постоянные параметры: u – постоянное напряжение на обмотке возбуждения, R_1 и L_1 – активное и индуктивное сопротивления обмотки возбуждения, R_2 и L_2 – активное и индуктивное сопротивления демпферной обмотки, B – напряженность магнитного поля, n_1 – число витков в обмотке возбуждения, n_2 – число стержней в демпферной обмотке, S_1 – площадь витка обмотки возбуждения, S_2 – площадь диаметрального сечения демпферной обмотки, m – коэффициент сильного регулирования ($m \geq 0$), J – осевой момент инерции ротора вместе с присоединенными к нему вращающимися частями, M – момент сил, действующих на ротор (момент нагрузки).

В уравнении, определяющем $\ddot{\theta}$, откорректируем знак перед $m\dot{\theta}$ и коэффициент при $i_0 \sin(\theta + \pi/4)$, домножив его на 4. Знаки величин u, i_0, i_n ($n = 1, 2, \dots, n_2$) изменим на противоположные. Далее предполагается, что $u > 0$. Введем вместо тока i_0 переменную x по формуле $i_0 = x + u/R_1$, вместо угла θ будем пользоваться углом $\gamma = \theta + \pi/4$. Обозначая через φ угол поворота ротора относительно статора, имеем $\varphi = \gamma + \omega t + \text{const}$.

Момент нагрузки M предполагается в [2, 7] постоянной отрицательной величиной, в [6, 8] рассматривается случай линейного диссипативного момента $M = -k\dot{\varphi}$, $k > 0$ – постоянная. В настоящей работе предполагается, что момент нагрузки является нечетной непрерывно дифференцируемой монотонно убывающей нелинейной функцией $M = M(\dot{\varphi})$ угловой скорости ротора $\dot{\varphi}$. При $\dot{\varphi} \neq 0$ знак этой функции противоположен знаку ее аргумента.

Поскольку $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\gamma}$, момент $M(\dot{\varphi})$ представляется в виде

$$M(\dot{\varphi}) = M(\omega + \dot{\gamma}) = -c_0 + \Delta M(\dot{\gamma}), \quad (1)$$

где

$$\Delta M(\dot{\gamma}) = M(\omega + \dot{\gamma}) - M(\omega), \quad c_0 = -M(\omega) \quad (c_0 > 0). \quad (2)$$

Функция $\Delta M(\dot{\gamma})$ является монотонно убывающей вместе с $M(\dot{\varphi})$, и поэтому при $\dot{\gamma} \neq 0$ знак $\Delta M(\dot{\gamma})$ противоположен знаку $\dot{\gamma}$.

Предположим, что существует постоянная $k > 0$ такая, что

$$\Delta M(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \geq 0), \quad \Delta M(\dot{\gamma}) \geq -k\dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma} \leq 0). \quad (3)$$

Два неравенства (3) эквивалентны одному неравенству $\dot{\gamma}[\Delta M(\dot{\gamma}) + k\dot{\gamma}] \leq 0$. Отсюда следует, что при любом $\dot{\gamma}$ выполняется неравенство

$$\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) \leq -k\dot{\gamma}^2, \quad (4)$$

т. е. график функции $\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma})$ лежит под параболой $-k\dot{\gamma}^2$. Для дальнейшего анализа необходимо, чтобы выполнялось условие $m + k > 0$. Поэтому при $m > 0$ можно отказаться от требования $k > 0$ и взять $k = 0$.

В результате при моменте нагрузки вида (1) имеем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающую работу синхронного электромотора

$$\begin{aligned} J\ddot{\gamma} &= -m\dot{\gamma} + \Delta M(\dot{\gamma}) - a_1 x \sin \gamma - a_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n \cos(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}) - b_0 \sin \gamma - c_0, \\ L_1 \dot{x} &= -R_1 x + a_1 \dot{\gamma} \sin \gamma, \\ L_2 \dot{i}_n &= -R_2 i_n + a_2 \dot{\gamma} \cos(\gamma - \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{n_2}), \quad n = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$a_1 = 4n_1 S_1 B \sqrt{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2} S_2 B, \quad b_0 = \frac{4}{R_1} u n_1 S_1 B \sqrt{2}, \quad c_0 = -M(\omega) \quad (6)$$

– положительные постоянные, i_n – производные токов i_n по времени.

2. Энергетический подход в задачах локальной и глобальной устойчивости. Нормальным режимом работы синхронного электромотора является равномерное вращение его ротора относительно статора с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = \omega$, равной угловой скорости вращения магнитного поля в статоре. Этот режим соответствует стационарному решению системы (5), то есть решению вида

$$\gamma = \gamma^0, \quad \dot{\gamma} = 0, \quad x = x^0, \quad i_n = i_n^0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_2), \quad (7)$$

где γ^0, x^0, i_n^0 – постоянные. Так как $\Delta M(0) = 0$, после подстановки выражений (7) в уравнения (5) находим

$$x^0 = 0, \quad i_n^0 = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, n_2),$$

а для γ^0 получаем уравнение

$$b_0 \sin \gamma + c_0 = 0. \quad (8)$$

Опуская особый случай, когда $c_0/b_0 = 1$, будем далее предполагать, что

$$c_0/b_0 < 1. \quad (9)$$

Тогда система (5) имеет два счетных набора стационарных решений

$$(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = (d_s, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10)$$

$$(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = (e_s, 0, 0, 0, \dots, 0), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11)$$

где стационарные значения d_s, e_s угла γ определены формулами

$$d_s = \gamma^{(0)} + 2\pi s, \quad e_s = \gamma^{(1)} + 2\pi s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

$$\gamma^{(0)} = -\arcsin c_0/b_0 \in (-\pi/2, 0), \quad \gamma^{(1)} = -\pi - \gamma^{(0)} \in (-\pi, -\pi/2). \quad (13)$$

Рассмотрим следующие функции фазовых переменных системы (5)

$$\begin{aligned} W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= \frac{1}{2}J\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2}L_1x^2 + \frac{1}{2}L_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2, \\ U(\gamma) &= \int_0^\gamma (b_0 \sin \alpha + c_0) d\alpha = b_0(1 - \cos \gamma) + c_0\gamma, \\ V(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) &= W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + U(\gamma). \end{aligned} \quad (14)$$

Производная функции W по времени в силу системы уравнений (5) равна

$$\dot{W}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 - \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0). \quad (15)$$

Воспользовавшись определениями (14) функций U, V , получаем

$$\dot{V}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2. \quad (16)$$

Согласно определению (14) функции W , она является определенно положительной по отношению к переменным $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Ее можно интерпретировать

как кинетическую энергию рассматриваемой системы, а функцию U – как ее потенциальную энергию. Тогда функция V является полной энергией системы, а формула (16) выражает теорему об изменении энергии.

Как отмечено выше, при условии (9) на любом промежутке $[-\pi + 2\pi s, \pi + 2\pi s]$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) существуют два значения d_s, e_s угла γ , которым соответствуют два стационарных решения (10), (11) системы (5). Эти значения d_s, e_s определены формулами (12), (13).

Теорема 1. *Стационарные решения (10) системы (5) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (11) – неустойчивы.*

Доказательство. Из определения (14) функции $U(\gamma)$ следует, что при условии (9) значения d_s и e_s являются, соответственно, точками локальных минимумов и локальных максимумов этой функции. Поэтому каждая из функций $V_{1s} = V - U(d_s)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) определена положительно по отношению к возмущениям $\gamma - d_s, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ для стационарного решения (10), а каждая из функций $V_{2s} = V - U(e_s)$ принимает отрицательные значения в сколь угодно малой окрестности стационарного решения (11).

Производные $\dot{V}_{1s}, \dot{V}_{2s}$ этих функций по t в силу уравнений (5) совпадают с производной (16) функции V и поэтому неположительны. Эти производные обращаются в нуль только при $\dot{\gamma} = 0, x = 0, i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$, то есть только в стационарных точках (10), (11). Поскольку стационарные точки изолированы, то в некоторой окрестности каждой из двух стационарных точек (10), (11) с данным номером s не существует других решений системы (5), для которых $\dot{V}_{1s} = 0$ или $\dot{V}_{2s}$.

Поэтому, согласно приведенным в [9] теоремам 5.2 и 6.3 Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского, стационарные решения (10) системы (5) асимптотически устойчивы, а стационарные решения (11) неустойчивы. Теорема 1 доказана.

Для получения условий глобальной устойчивости системы (5) воспользуемся принципом инвариантности Ла–Салля в формулировке теоремы VIII из книги [10].

В этой теореме предполагается существование неотрицательной функции Ляпунова V , имеющей знакопостоянную отрицательную производную по t в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, и доказывается, что любое ограниченное при $t \geq 0$ решение системы с течением времени неограниченно приближается к множеству точек фазового пространства, состоящему из фазовых траекторий тех решений, определенных при $t \geq 0$, для которых $\dot{V} = 0$. Доказательство указанной теоремы справедливо и в том случае, когда вместо неотрицательности функции V во всем фазовом пространстве предполагается, что данная функция ограничена снизу на решениях рассматриваемой системы.

В качестве функции Ляпунова в этой теореме возьмем функцию V , определенную в (14) и имеющую знакопостоянную отрицательную производную (16) в силу системы (5). Функция V не является ограниченной снизу во всем фазовом пространстве, так как в ее определение входит функция U , которая, согласно (14), содержит линейный по γ член $c_0\gamma$. Для применимости теоремы Ла–Салля с такой функцией V достаточно, чтобы угол γ был ограничен снизу на решениях системы.

3. Условия ограниченности угла γ . Чтобы получить достаточные условия ограниченности угла γ в любом решении системы (5), воспользуемся подходом [3, 1], который позволяет вывести свойство ограниченности угловой переменной для многомерной системы из свойства ограниченности такой переменной для эталонного дифференциального уравнения второго порядка. Далее будут использоваться эталонные уравнения вида

$$J\ddot{\gamma} = -a_0\dot{\gamma} - b_0 \sin \gamma - c_0, \quad (17)$$

где постоянные $b_0, c_0 > 0$ определены формулами (6), а постоянная $a_0 > 0$ выбирается специальным образом.

Уравнение вида (17) с положительными коэффициентами a_0, b_0, c_0 детально изучено [3, 4, 11]. Приведем основные результаты этого исследования.

Стационарные решения $(\gamma, \dot{\gamma}) = (\gamma^0, 0)$, $\gamma^0 = \text{const}$ уравнения (17) определяются тригонометрическим уравнением (8). Поэтому в предположении (9) уравнение (17) имеет два счетных набора стационарных решений, которые определяются указанными в (12), (13) значениями d_s, e_s постоянной γ^0 .

С помощью локального анализа по линейному приближению нетрудно установить, что стационарные точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (d_s, 0)$ являются для уравнения (17) асимптотически устойчивыми особыми точками типа «фокус» или «узел», а точки $(\gamma, \dot{\gamma}) = (e_s, 0)$ – неустойчивые особые точки типа «седло».

Глобальный анализ уравнения вида (17), проведенный Ф. Трикоми [4], показывает, что оно может иметь три качественно различных типа фазовых портретов. Введя безразмерные параметры

$$a = a_0/\sqrt{b_0 J}, \quad c = c_0/b_0, \quad (18)$$

Ф. Трикоми установил, что существует критическое значение параметра a , которое является функцией $a_{\text{cr}}(c)$ параметра $c \in (0, 1)$ и обладает следующими свойствами [2, 11]. В случае $a > a_{\text{cr}}$ каждое решение уравнения (17) стремится к одной из его стационарных точек при $t \rightarrow +\infty$. При $a \leq a_{\text{cr}}$ кроме решений, стремящихся к стационарным точкам, существуют решения, вдоль которых угол γ неограниченно убывает с течением времени.

Для функции $a_{\text{cr}}(c)$ не существует явного выражения, но разными авторами получены ее аналитические оценки сверху и снизу (см. [11], с. 122–123). При получении этих оценок вместо угла γ используют угол $\theta = -\gamma$. Тогда указанному в (13) главному стационарному значению $\gamma^{(0)} \in (-\pi/2, 0)$ угла γ соответствует значение $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ угла θ . Так как $\theta_0 = \arcsin c$, то $c = \sin \theta_0$, и величину $a_{\text{cr}}(c)$ можно рассматривать как функцию $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ угла $\theta_0 \in (0, \pi/2)$. В [12] при помощи компьютера построен график функции $a_{\text{cr}} = a_{\text{cr}}(\theta_0)$ и показано, что линейная и синусоидальная аппроксимации $a_{\text{crL}}(\theta_0) = 0.76 \cdot \theta_0$ и $a_{\text{crS}}(\theta_0) = 2.76622 \cdot \sin(0.283886 \cdot \theta_0)$ обеспечивают вычисление $a_{\text{cr}}(\theta_0)$ с абсолютной погрешностью не больше, чем $1.5 \cdot 10^{-2}$ и $3.4 \cdot 10^{-5}$ соответственно.

Достаточные условия ограниченности угла γ сверху и снизу дает следующая теорема.

Теорема 2. Если существуют значения постоянных параметров $\lambda, \varepsilon \geq 0$ такие, что

1) любое решение дифференциального уравнения

$$J\ddot{\gamma} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (19)$$

где b_0, c_0 определены в (6), ограничено при $t \geq 0$,

2) при всех значениях фазовых переменных $\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$ выполнено неравенство

$$\dot{W}(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + 2\lambda W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \varepsilon J^{-1}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}(b_0 \sin \gamma + c_0) \leq 0, \quad (20)$$

где функция W определена в (14), то в любом решении

$$\gamma(t), \dot{\gamma}(t), x(t), i_1(t), \dots, i_{n_2}(t) \quad (21)$$

системы (5) функция $\gamma(t)$ ограничена на полуоси $t \geq 0$.

Ее доказательство дано в [8]. Оно следует доказательству теоремы 4.4.1 из [1].

Условием 2 теоремы 2 является неравенство (20). Подставим в его левую часть выражения (14), (15) функций $W, \dot{W}$ и затем, воспользовавшись верхней оценкой (4) функции $\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma})$, потребуем, чтобы полученное в результате выражение было неположительным. Приходим к неравенству

$$(-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1})\dot{\gamma}^2 + (-R_1 + \lambda L_1)x^2 + (-R_2 + \lambda L_2)\sum_{n=1}^{n_2} i_n^2 \leq 0,$$

достаточному для выполнения неравенства (20). Для того, чтобы оно выполнялось при всех $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$, необходимо и достаточно, чтобы параметры λ, ε удовлетворяли трем неравенствам

$$-m - k + \lambda J + \varepsilon J^{-1} \leq 0, \quad -R_1 + \lambda L_1 \leq 0, \quad -R_2 + \lambda L_2 \leq 0.$$

Их анализ приводит к следующему выводу.

Лемма 1. Пусть существует постоянная $k > 0$ такая, что нелинейный момент нагрузки удовлетворяет условию (3), и пусть значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ и точки X, Y, Z, Z_0 плоскости (λ, ε) определены формулами

$$\varepsilon_1 = (m + k)J, \quad \lambda_1 = (m + k)J^{-1}, \quad \lambda_2 = \min(R_1/L_1, R_2/L_2). \quad (22)$$

$$X = (0, \varepsilon_1), \quad Y = (\lambda_1, 0), \quad Z = (\lambda_2, 0), \quad Z_0 = (\lambda_2, \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1),$$

Тогда множество D_0 множество значений параметров $\lambda, \varepsilon \geq 0$, удовлетворяющих условию 2 теоремы 2 непусто и оно содержит множество D , которое при $\lambda_1 \leq \lambda_2$ состоит из точек плоскости (λ, ε) , лежащих внутри треугольника OXY и на его сторонах (рис. 1, А), а при $\lambda_1 > \lambda_2$ множество D состоит из точек, лежащих внутри трапеции OXZ_0Z и на ее сторонах (рис. 1, В).

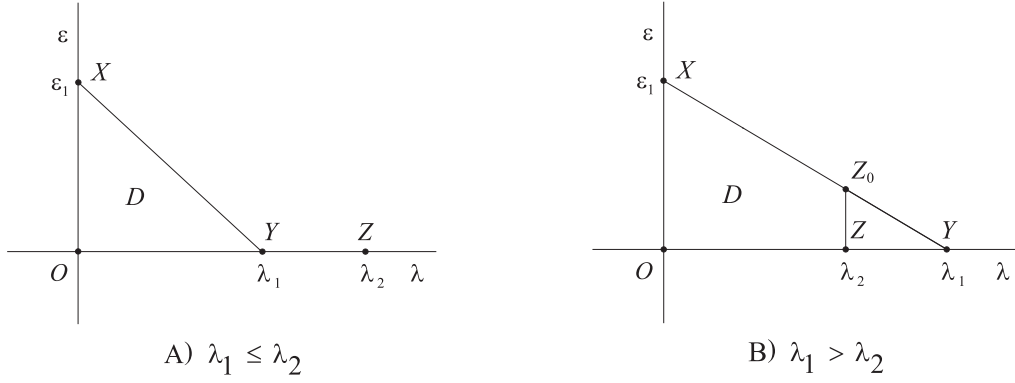


Рис. 1. Область D значений параметров λ, ε

Лемма 1 позволяет заменить в теореме 2 предположение о существовании значений параметров λ, ε , обеспечивающих выполнение условия 2, указанием области изменения этих параметров, в которой выполнено данное условие.

Рассмотрим теперь условие 1 теоремы 2. Определение (18) параметров a, c для уравнения (19) принимает вид

$$a = d(\lambda, \varepsilon) / \sqrt{b_0 J}, \quad c = c_0 / b_0.$$

Здесь $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$. Согласно результатам Ф. Трикоми, условие 1 ограниченности решений уравнения (19) в теореме 2 означает, что для этого уравнения имеет место случай $a > a_{\text{cr}}(c)$, то есть выполнено неравенство $d(\lambda, \varepsilon) / \sqrt{b_0 J} > a_{\text{cr}}(c)$.

Если такое неравенство выполнено в некоторой точке $(\lambda, \varepsilon) \in D$, то оно тем более выполнено в точке $(\lambda_{\text{max}}, \varepsilon_{\text{max}}) \in D$, в которой функция $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает свое максимальное значение d_{max} в замкнутой ограниченной области D . Если же указанное неравенство не выполнено ни в одной точке области D , то оно, в частности, не выполнено и в точке $(\lambda_{\text{max}}, \varepsilon_{\text{max}})$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Точка $(\lambda, \varepsilon) \in D$, в которой $d(\lambda, \varepsilon) / \sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, существует только в том случае, когда $d_{\text{max}} / \sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$.

Чтобы найти d_{max} , заметим, что при любом $K > 0$ функция $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$ строго монотонно возрастает вдоль луча $\varepsilon = K\lambda$ ($\lambda \geq 0$), идущего на плоскости (λ, ε) из начала координат в первый квадрант. Поэтому свое максимальное значение d_{max} в области D функция $d(\lambda, \varepsilon)$ принимает на «северо-восточной» границе этой области, то есть на отрезке XY в случае А или на ломаной XZ_0Z в случае В (рис. 1). Но в случае В на вертикальном отрезке ZZ_0 функция $d(\lambda, \varepsilon)$ становится монотонно возрастающей функцией $d(\lambda_2, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda_2\varepsilon}$ одной переменной ε . Поэтому в случае В функция $d(\lambda, \varepsilon)$ не может достигать своего максимума d_{max} внутри отрезка ZZ_0 . Следовательно, максимум функции $d(\lambda, \varepsilon)$ в области D достигается на отрезке XY в случае А или на отрезке XZ_0 в случае В. Проведя вычисления, приходим к такому выводу.

Лемма 3. Для функции $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, являющейся коэффициентом демпфирования в уравнении (19), ее максимум в области D равен

$$d_{\max} = \begin{cases} m + k, & 0 < \lambda_1 \leq 2\lambda_2; \\ 2\sqrt{\varepsilon_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1}, & \lambda_1 > 2\lambda_2. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь значения $\varepsilon_1, \lambda_1, \lambda_2$ определены по формулам (22).

С помощью лемм 1, 2, 3 получаем из теоремы 2 достаточный критерий ограниченности угла γ , в котором вместо коэффициента $d(\lambda, \varepsilon) = 2\sqrt{\lambda\varepsilon}$, зависящего от неопределенных параметров λ, ε , используется его известное максимальное значение $d_{\max}$.

Теорема 3. Пусть нелинейный момент нагрузки удовлетворяет условию (3) и пусть для дифференциального уравнения

$$C\ddot{\gamma} + d_{\max}\dot{\gamma} + b_0 \sin \gamma + c_0 = 0, \quad (24)$$

где $b_0, c_0, d_{\max}$ определены по формулам (6), (23), выполнено неравенство Трикоми $d_{\max}/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, где $c = c_0/b_0$.

Тогда в любом решении (21) системы уравнений (5) функция $\gamma(t)$ ограничена при $t \geq 0$.

4. Теорема о глобальной устойчивости. Докажем теперь, что для любого решения системы (5) в случае ограниченности угла γ имеет место ограниченность остальных фазовых переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Для обеспечения ограниченности угла γ достаточно принять условия теоремы 3. Таким образом, необходимо доказать следующую лемму.

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда любое решение (21) системы (5) ограничено по всем переменным при $t \geq 0$.

Доказательство. Из определения (14) функции $U(\gamma)$ и формул (12), (13) следует, что при условии (9) значения $\gamma = d_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют точкам локальных минимумов этой функции, а значения $\gamma = e_s$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – точкам ее локальных максимумов.

В доказательстве теоремы 2 для функции $\gamma(t)$ выводится оценка снизу $\gamma(t) \geq e_{s_0}$ ($t \geq 0$), номер $s_0 \leq 0$ определяется в ходе доказательства. Слева и справа от точки локального максимума $\gamma = e_{s_0}$ функции $U(\gamma)$ расположены точки $\gamma = d_{s_0-1}$ и $\gamma = d_{s_0}$ ее локальных минимумов. При этом значение $\gamma = d_{s_0}$ является точкой минимума функции $U(\gamma)$ на всей полуоси $\gamma \geq e_{s_0}$. Следовательно, на рассматриваемом решении (21) системы (5) функция

$$\Delta U(\gamma) = U(\gamma) - U(d_{s_0}) = \int_{d_{s_0}}^{\gamma} (b_0 \sin \sigma + c_0) d\sigma = b_0(\cos d_{s_0} - \cos \gamma) + c_0(\gamma - d_{s_0}) \quad (25)$$

неотрицательна на этой полуоси: $\Delta U(\gamma) \geq 0, \gamma \geq e_{s_0}$.

Рассмотрим функцию

$$v(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma).$$

Она лишь на константу отличается от функции $V(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2})$, определенной в (14), и поэтому имеет такую же производную (16) по t в силу системы (5):

$$\dot{v}(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) = -m\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) - R_1x^2 - R_2 \sum_{n=1}^{n_2} i_n^2.$$

Поскольку $\dot{\gamma}\Delta M(\dot{\gamma}) \leq 0$ согласно (2), то $\dot{v} \leq 0$. Поэтому на решении системы (5) функция v не превосходит своего начального значения, то есть фазовые переменные принадлежат множеству

$$\Omega = \{(\gamma, \dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) : W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) + \Delta U(\gamma) \leq v_0\}, \quad (26)$$

где

$$v_0 = W(\dot{\gamma}_0, x_0, i_{10}, \dots, i_{n_20}) + \Delta U(\gamma_0)$$

– значение функции v в начальный момент $t = 0$. Из неотрицательности функций $W, \Delta U$ следует, что $v_0 \geq 0$, и тогда из (26) следует, что на решении системы (5) выполняются неравенства

$$W(\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}) \leq v_0, \quad \Delta U(\gamma) \leq v_0. \quad (27)$$

Согласно определению (14), функция W является определено положительной квадратичной формой переменных $\dot{\gamma}, x, i_1, \dots, i_{n_2}$. Поэтому первому из неравенств (27) удовлетворяют только значения этих переменных, лежащие в шаре $\dot{\gamma}^2 + x^2 + i_1^2 + \dots + i_{n_2}^2 \leq \rho^2$ конечного радиуса ρ . Второе неравенство (27) с учетом выражения (25) для ΔU приводит к еще одному доказательству ограниченности функции $\gamma(t)$ сверху. Лемма 4 доказана.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 5. Пусть функция V определена по формуле (14), и пусть $\mathcal{M}$ – множество точек фазового пространства, состоящее из фазовых траекторий всех решений системы (5), определенных на полуоси $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию $\dot{V} = 0$.

Множество $\mathcal{M}$ состоит только из стационарных точек системы (5).

Доказательство. Из формулы (16) для $\dot{V}$ с учетом (2) следует, что множество $\mathcal{M}$ образовано фазовыми траекториями, для которых $\dot{\gamma} = 0$, $x = 0$, $i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$, т. е. оно состоит из стационарных точек $\gamma = \gamma^0$, $\dot{\gamma} = 0$, $x = 0$, $i_1 = \dots = i_{n_2} = 0$ системы (5). В п. 2 установлено, что при $c = c_0/b_0 < 1$ множество стационарных точек данной системы состоит из двух счетных подмножеств, соответствующих значениям (12) постоянной γ^0 . Лемма 5 доказана.

В теореме 3 даны условия ограниченности решений системы уравнений (5) по переменной γ . Далее, в лемме 4 установлено, что из ограниченности решений системы (5) по γ следует их ограниченность по всем переменным.

Тогда из принципа Ла–Салля (см. п. 2) с функцией Ляпунова V , определенной в (14), следует, что при выполнении условий теоремы 3 всякое решение системы уравнений (5) с течением времени неограниченно приближается к инвариантному множеству $\mathcal{M}$. Согласно лемме 5, множество $\mathcal{M}$ – это множество стационарных точек системы (5). Поскольку расстояния между любыми двумя точками множества $\mathcal{M}$ ограничены снизу положительной постоянной $\min(d_0 - e_0, e_1 - d_0) > 0$, то стремление решения к $\mathcal{M}$ означает, что оно стремится к одной из стационарных точек. При этом, как показывает теорема 1, на 2π -периоде изменения угла γ существует одна локально асимптотически устойчивая и одна неустойчивая стационарная точка.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть нелинейный момент нагрузки удовлетворяет неравенствам (3) и для эталонного дифференциального уравнения (24) выполнено условие Трикоми $d_{\max}/\sqrt{b_0 C} > a_{\text{cr}}(c)$, где величина $d_{\max}$ определена в (23), $c = c_0/b_0 < 1$.

Тогда каждое решение системы уравнений (5), описывающей динамику синхронного электромотора, с течением времени стремится к одному из стационарных решений. При этом на каждом 2π -периоде изменения угла γ множество стационарных решений состоит из одного неустойчивого и одного асимптотически устойчивого стационарного решения.

1. Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Леонов Г.А. Фазовая синхронизация. Теория и приложения // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 10. – С. 47–85.
3. Леонов Г.А. Второй метод Ляпунова в теории фазовой синхронизации // ПММ. – 1976. – 40, вып. 2. – С. 238–244.
4. Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentasi in electrotechnica // Annal. della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa. – 1933. – 2, no. 2. – P. 1–20.
5. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б., Мозалевская Г.В. Асимптотическая устойчивость в целом двухфазовой модели асинхронного электромотора // Труды ИПММ. – 2016. – 30. – С. 70–79.
6. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Глобальная устойчивость двухфазовой модели синхронного электромотора // Труды ИПММ. – 2016. – 30. – С. 53–69.
7. Леонов Г.А., Зарецкий А.М. Глобальная устойчивость и колебания динамических систем, описывающих синхронные электрические машины // Вестник СПбГУ. – Сер. 1. – 2012. – 4. – С. 18–27.
8. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Достаточное условие глобальной устойчивости модели синхронного электромотора // Механика твердого тела. – 2016. – 46. – С. 73–90.
9. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука. – 1967. – 224 с.
10. Ла-Салль Ж., Лефшец С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 168 с.
11. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 300 с.
12. Коносевиц Б.И., Коносевиц Ю.Б. Аппроксимация критического значения параметра демпфирования для синхронного электромотора // Труды ИПММ. – 2014. – 29. – С. 121–126.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich, G. V. Mozalevskaya

Global stability of the multy-current model of the synchronous electric motor under nonlinear load moment.

This investigation is grounded on the model of the synchronous electric motor that includes differential equations for electric currents in windings of the rotor. The load moment is assumed to be nonlinear function of the angular velocity of the rotor. Within the framework of this model, the system of differential equations, describing the dynamics of the synchronous electric motor, has the denumerable set of steady solutions corresponding to the operating mode of steady rotation of the rotor. Effective sufficient condition is obtained guaranteeing that any motion of the synchronous electric motor tends with time to one of these steady rotations.

Keywords: *synchronous electric motor, global asymptotic stability, nonlocal reduction method, LaSalle invariance pricipile.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
konos.donetsk@yandex.ru

Получено 15.06.17

УДК 531.38

©2017. А. Н. Курганский, А. Ю. Максимова

О КО-КОНТР-ФРАГМЕНТАХ ПОВЕДЕНИЯ АВТОМАТОВ

Работа относится к области теории восстановления и представления абстрактных автоматов фрагментами поведения и посвящена исследованию структуры классов конечных связных инициальных автоматов без выхода, задаваемых системами определяющих соотношений, рассматриваемых в роли фрагментов, кофрагментов, контрфрагментов и коконтрфрагментов автоматов.

Ключевые слова: фрагменты, кофрагменты, контрфрагменты, коконтрфрагменты, системы определяющих соотношений, представление автоматов

1. Введение. Одно из современных направлений развития теории автоматов отталкивается от понятия коалгебры, которое является двойственным понятию алгебры и рассматривается как определение динамических систем на языке теории категорий [1, 2, 3]. Данному направлению развития принадлежат такие понятия как коиндукция и бисимуляция. Настоящая работа лежит в области теории представления и восстановления автоматов по фрагментам поведения, разработанной в [4, 5, 6], и является развитием, на основе идей коалгебраического подхода, работы [10], посвященной системам определяющих соотношений конечных связных инициальных автоматов без выхода. Современное состояние теории представления автоматов фрагментами поведения можно найти в [7, 8, 9].

Инициальный автомат порождает отношение на словах, называемое правой конгруэнцией автомата, по правилу: слова находятся в отношении правой конгруэнции автомата тогда и только тогда, когда они ведут в одно и то же состояние из начального. Произвольное множество пар слов называется определяющими соотношениями автомата, если правоконгруэнтное замыкание этого множества совпадает с правой конгруэнцией автомата. С точки зрения теории экспериментов с автоматами элементы правой конгруэнции автомата являются фрагментами его поведения и структуры. В теории автоматов фундаментальна проблема минимизации автомата по числу состояний. Однако правоконгруэнтное замыкание отношения на словах дает автоматы с максимальным числом состояний из всех тех, для которых эти отношения выполняются. Это говорит о том, что определяющие соотношения и их конгруэнтное замыкание скорее связаны со структурой графа автомата, чем с его поведением, и, следовательно, не вполне соответствуют поведенческой проблематике теории автоматов. Цель данной работы – рассмотреть элементы правой конгруэнции не только в роли фрагментов автомата, но и в роли определяемых в работе кофрагментов, контрфрагментов и коконтрфрагментов (короче: (ко)(контр)фрагментов), что позволит связать определяющие отношения как со структурным, так и поведенческим контекстом анализа и синтеза автоматов. Можно сказать, что фрагменты, кофрагменты, контрфрагменты и коконтрфрагменты автоматов представляют собой, соответственно, необходимое,

разрешенное, запрещенное как противоречие и запрещенное как контрпример поведение. Точка зрения на фрагменты в роли (ко)(контр)фрагментов лежит в русле идей работы [8] и является развитием некоторых её моментов.

2. Постановка задачи. Пусть дан произвольный класс автоматов, который назовём *допустимым*. Дано задание в виде (к примеру: теоретико-множественной) формулы над (ко)(контр)фрагментами на восстановление неизвестного автомата из допустимого класса. Условие задания в виде формулы F над (ко)(контр)фрагментами назовем *представлением* автомата. Автоматы, являющиеся решениями этого задания, назовем *совместимыми* с представлением F . Множество всех совместимых с представлением автоматов назовем *объемом* представления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Представление называется непротиворечивым, если его объем не пуст, и называется полным, если его объем состоит из одного автомата (с принятой к рассмотрению точностью, например, с точностью до изоморфизма или бисимуляции). В противном случае, представление называется противоречивым.

Цель данной работы – ввести понятия (ко)(контр)фрагмента автомата и исследовать в частных случаях структуру объема представления.

3. Общие замечания.

3.1. Логика восстановления автоматов. Представление автомата (ко)(контр)фрагментами формируется на основе спецификации (априорной информации) и экспериментов с автоматом. Оно содержит в неявном виде частичную или полную информацию об автомате. Синтез автомата по этой информации подразумевает некоторую логику получения новой явной информации о поведении и структуре автомата. Логика восстановления автомата позволяет получать (перечислять) новые факты об автомате. В пределе с помощью некоторого алгоритма она дает полную информацию в готовом замкнутом виде, например, таблице автомата. Таким образом, проводя аналогии с перечислимыми и рекурсивными (разрешимыми) множествами, можно сказать, что процесс восстановления автомата есть переход от неявной формы представления автомата, позволяющей без дополнительных вычислительных усилий лишь перечислять факты о его поведении, к явной, рекурсивной, форме задания автомата.

В работе мы проводим следующие аналогии между синтаксическими теориями в логике и конечными автоматами рассматриваемыми в контексте систем определяющих соотношений. Синтаксическая теория представляет собой множество правильно построенных утверждений (формул), среди которых выделены аксиомы, и правил вывода. Правила вывода, базируясь на аксиомах, разбивают формулы на два класса: выводимые формулы (доказуемые теоремы) и невыводимые формулы. Собственно, теоремы и образуют саму теорию. Аксиомы и всякое множество теорем являются фрагментами теории, то есть частью, абстракцией теории. Аксиомы в неявном виде логически содержат всю теорию. Теоремы в неявном виде содержат аксиомы. При изменении множества аксиом меняется теория. Мы придерживаемся аналогий между: 1) правильно построенными утверждениями и (ко)(контр)фрагментами, 2) теорией и автоматом, 3) построением теории и синтезом автомата,

4) аксиомами теории и фрагментами автомата. Эти аналогии в свою очередь влекут аналогии между: 1) теоремами теории и фрагментами автомата, 2) моделями теории и кофрагментами, 2) противоречиями и контрфрагментами, 3) контрпримерами в доказательствах и коконтрфрагментами. Аналогии будут разъяснены ниже. Теперь в общих определениях объясним смысл понятий (ко)(контр)фрагментов.

3.2. Фрагменты. Фрагмент автомата – это информация о необходимом поведении и структуре автомата, это часть автомата, его абстракция. Фрагмент является абстрактно-всеобщим определением совместимого с ним класса автоматов.

Восстановление автомата означает синтетическое пополнение содержания фрагмента, расширение его до некоторого допустимого и совместимого с фрагментом автомата. Этот процесс есть выполнение некоторого алгоритма. Результат действия алгоритма будем называть *замыканием* фрагмента. Вообще говоря, замыкание фрагмента неоднозначно. Ниже будут выделены частные случаи: индуктивное и коиндуктивное замыкания фрагмента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фрагмент назовем замкнутым, если он является допустимым автоматом.

3.3. Решётка фрагментов и допустимых автоматов. Вводимые ниже понятия (ко)(контр)фрагментов автомата отталкиваются от понятия фрагмента вообще. Мы считаем, что дано множество объектов, называемых фрагментами, которое включает в себя и множество допустимых автоматов. Между фрагментами и допустимыми автоматами установлено отношение «быть фрагментом». Если фрагмент F является фрагментом автомата A , то пишем $F \leq A$ и говорим также, что A содержит фрагмент F или A *совместим* с фрагментом F .

Считаем, что допустимые автоматы с отношением $\leq$ образуют полную решётку с операциями $\sup$ и $\inf$, и что, кроме того, из $F \leq A$, $F \leq B$ следует $F \leq \inf\{A, B\}$ для любых допустимых автоматов A , B и фрагмента F . Такое упрощение сужает разнообразие принимаемых во внимание классов допустимых автоматов, но для цели данной работы, заключающейся в определении понятий (ко)(контр)фрагментов и представления с их помощью автоматов, обобщающих понятие фрагмента автомата, введенного в [4, 5, 6], данное ограничение удовлетворительно. Наибольший в решётке допустимый автомат обозначим через [1], наименьший через [0].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Индуктивным замыканием фрагмента A называется допустимый автомат $[A]$, являющийся наименьшим в решётке среди всех допустимых автоматов, содержащих A .

Введем отношение быть фрагментом на самих фрагментах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фрагмент A является фрагментом фрагмента B , если индуктивное замыкание $[A]$ является фрагментом индуктивного замыкания $[B]$. Два фрагмента A , B назовем эквивалентными, если $A \leq B$ и $B \leq A$. Решётка классов эквивалентности фрагментов изоморфна решётке допустимых автоматов. Соответствующий изоморфизм ставит в соответствие автомату класс эквивалентности

фрагментов, содержащий этот автомат.

Обозначим класс допустимых автоматов, совместимых с фрагментом F , через $\text{Fr}(F)$. Класс $\text{Fr}(F)$ является полной решёткой с наименьшим (отношение $\leq$) автоматом $[F]$ и наибольшим $[1]$.

Автомат $[1]$ совместим с любым фрагментом, а в рассматриваемом ниже примере автомат $[1]$ имеет наименьшее число состояний из всех допустимых автоматов. Таким образом, представление автоматов с помощью фрагментов имеет вырожденное, тривиальное и, с точки зрения минимизации, наилучшее решение. Это указывает на несоответствие фрагментов автоматно-поведенческой проблематике при синтезе автоматов. Однако в задачах навигации и распознавания карт, зачастую задаваемых графами с размеченными вершинами или дугами, то есть как и автоматы, фрагменты играют другую роль, поскольку на первый план выдвигается скорее структура объекта, а не его поведение.

3.4. Кофрагменты = модели. Кофрагмент автомата является двойственным понятием к фрагменту и описывает разрешенное поведение. Если A является фрагментом B , то B является кофрагментом A . Кофрагмент является ограничением сверху на поведение или структуру восстанавливаемого автомата. Он описывает класс совместимых с ним автоматов: всякий автомат класса является фрагментом кофрагмента класса, то есть общим между автоматами класса является то, что они все являются частью одного и того же.

В представленном ниже примере мы свяжем аналогией понятия кофрагмента и модели теории, а также – контрпримера и коконтрфрагмента, противоречия и контрфрагмента.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фрагмент B является кофрагментом фрагмента A , если индуктивное замыкание фрагмента A (то есть некоторый допустимый автомат) является фрагментом индуктивного замыкания фрагмента B .

Обозначим класс допустимых автоматов, для которых F является кофрагментом, через $\text{co-Fr}(F)$. Класс $\text{co-Fr}(F)$ является полной решёткой с наименьшим (отношение $\leq$) автоматом $[0]$ и наибольшим F .

В математической логике моделью синтаксической теории T является некоторая содержательная математическая структура, которая в свою очередь может быть аксиоматизирована некоторой синтаксической теорией T' , в которой аксиомы исходной теории T являются теоремами. Таким образом, можно сказать, что моделью одной синтаксической теории T является другая синтаксическая теория T' такая, что аксиомы первой (T) являются теоремами во второй (T'). Теоремы модели играют роль содержательной истины для T , остальные формулы играют роль ложных утверждений. На языке (ко)(контр)фрагментов в теории представления автоматов модель переходит в роль кофрагмента. Поведение, не являющееся фрагментом кофрагмента автомата, играет роль лжи. Понятие лжи позволяет вводить понятие контрпримера (коконтрфрагмента) в том смысле, в котором его используют для доказательства ложности утверждений.

3.5. Контрфрагменты = противоречия. Контрфрагмент – запрещенное поведение или запрещенный элемент структуры автомата. Подобно тому, как теория считается противоречивой, если в ней выводятся противоречия, то есть некоторые заведомо недопустимые факты как, к примеру, $A = \bar{A}$, то и представление автомата противоречиво, если синтез на его основе дает автомат содержащий контрфрагмент.

Пусть K – класс допустимых автоматов. Обозначим через $\text{contra-Fr}(A)$ класс допустимых автоматов, для которых A не является фрагментом:

$$\text{contra-Fr}(A) = K - \text{Fr}(A) = \overline{\text{Fr}(A)}.$$

3.6. Коконтрфрагменты = контрпримеры. Коконтрфрагмент – двойственное понятие к контрфрагменту: если B – коконтрфрагмент автомата A , то A не является фрагментом B .

Обозначим через $\text{co-contra-Fr}(A)$ класс допустимых автоматов, для которых A не является кофрагментом:

$$\text{co-contra-Fr}(A) = K - \text{co-Fr}(A) = \overline{\text{co-Fr}(A)}.$$

Упомянутую выше аналогию между коконтрфрагментами и контрпримерами рассмотрим на примере поиска контрпримера для пропозициональной формулы в исчислении секвенций (подробности к теме поиска контрпримера в исчислении секвенций в [11]). Напомним, что секвенцией называется выражение вида $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ – некоторые конечные множества формул исчисления высказываний. Если A – пропозициональная формула, то, в силу соответствующей теоремы о полноте, секвенция $\vdash A$ выводима тогда и только тогда, когда A – тавтология. Аксиомами исчисления секвенций являются секвенции, в которых Γ и Δ представляют собой наборы переменных, причем пересечение Γ и Δ непусто. Можно сказать, что $\vdash A$ является контрфрагментом теории, если A – не тавтология. Для доказательства того, что секвенция $\vdash A$ является теоремой исчисления, можно пойти двумя путями. Первый путь заключается в том, чтобы из этой секвенции и аксиом вывести контрфрагмент (противоречие), например, $\vdash (x \wedge \bar{x})$. Второй путь основывается на теореме о полноте, связывающей теорию и модель, и идёт, в некотором смысле, в другом направлении – от теоремы к аксиомам модели, в направлении анализа формулы с целью найти булевы значения переменных, при которых формула как булева функция принимает значение 0. Другими словами, надо найти такое множество секвенций, содержащих только переменные, из которых выводится $\vdash A$, и при этом хотя бы одна из секвенций не является аксиомой, то есть имеет вид $\Gamma \vdash \Delta$, в котором Γ и Δ представляют собой наборы переменных и пересечение Γ и Δ пусто. Тогда при значении 1 переменных из Γ и значении 0 переменных из Δ формула A принимает значение 0. Вот такие множества секвенций из переменных, содержащих не только аксиомы, и являются аналогами коконтрфрагментов в представлении автоматов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Фрагмент A' называется контрфрагментом (контрфрагментом) фрагмента A , если $[A] \in \text{contra-Fr}(A')$ (соответственно, $[A] \in \text{co-contra-Fr}(A')$).

В определении через $[A]$ обозначается индуктивное замыкание фрагмента A .

3.7. Составные фрагменты. Из фрагментов можно составлять сложные фрагменты. Если A и B – фрагменты, то составной фрагмент будем обозначать через $A + B$. Это может быть, в зависимости от природы фрагментов, либо объединение фрагментов как множеств, либо прямая сумма частичных автоматов и т. д. По определению считаем, что

$$\text{Fr}(A + B) = \text{Fr}(\sup(A, B)) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B).$$

Отсюда сразу следует:

$$\text{contra-Fr}(A + B) = \text{contra-Fr}(A) \cap \text{contra-Fr}(B).$$

Аналогично, по определению:

$$\text{co-Fr}(A + B) = \text{co-Fr}(\inf(A, B)) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B).$$

Откуда следует:

$$\text{co-contra-Fr}(A + B) = \text{contra-Fr}(A) \cap \text{contra-Fr}(B).$$

4. Определения. Обозначим класс допустимых автоматов K . Пусть $M = (S, X, \delta, s_0)$ – допустимый автомат с множеством состояний S , входным алфавитом X , функцией перехода $\delta : S \times X \rightarrow S$ и начальным состоянием $s_0 \in S$. Автомат порождает на X^* правую конгруэнцию ρ_M по правилу $p\rho_M q$, если $s_0 p = s_0 q$, где, если s – состояние, а p – слово, то $sp = \delta(s, p)$.

Пусть $\rho \subseteq X^* \times X^*$. Считаем, что существует такое минимальное по включению отношение $[\rho]$, $\rho \subseteq [\rho]$, что $[\rho] = \rho_M$ для некоторого допустимого автомата M . Назовём $[\rho]$ K -допустимым замыканием отношения ρ . К примеру, если бы допустимый класс содержал все автоматы в алфавите X , то $[\rho]$ было бы правоконгруэнтным замыканием отношения ρ . Мы отождествляем автомат M и его отношение правой конгруэнции ρ_M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношение ρ называется фрагментом отношения ρ' , а ρ' – кофрагментом ρ , если $[\rho] \subseteq [\rho']$. Обозначим класс допустимых автоматов, для которых отношение ρ является фрагментом (кофрагментом) через $\text{Fr}(\rho)$ (соответственно, $\text{co-Fr}(\rho)$).

Обозначим через $\text{contra-Fr}(\rho)$ класс допустимых автоматов, для которых ρ не является фрагментом, $\text{contra-Fr}(\rho) = K - \text{Fr}(\rho) = \overline{\text{Fr}(\rho)}$. Аналогично,

$$\text{co-contra-Fr}(\rho) = K - \text{co-Fr}(\rho) = \overline{\text{co-Fr}(\rho)}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношение ρ' называется контрфрагментом (контрфрагментом) отношения ρ , если $[\rho] \in \text{contra-Fr}(\rho')$ (соответственно, $[\rho] \in \text{co-contra-Fr}(\rho')$).

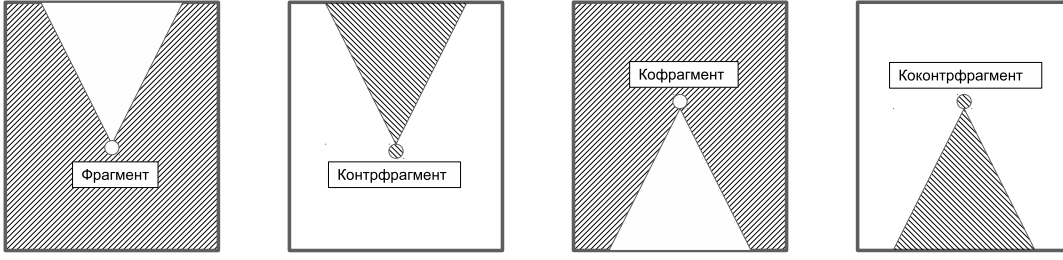


Рис. 1. Заштрихованная часть не содержит автоматов определяемого класса

Иллюстрация идеи, вкладываемой в определения (ко)(контр)фрагментов, показана на рисунке 1.

Множества вида $\text{Fr}(\rho)$, $\text{co-Fr}(\rho)$, $\text{contra-Fr}(\rho)$, $\text{co-contra-Fr}(\rho)$ назовем классами автоматов, представляемых, соответственно, фрагментами, кофрагментами, контрфрагментами, коконтрфрагментами.

5. Пример и результат. Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$ множества натуральных, целых и простых чисел, $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть автомат $[n] = (\{0, 1, \dots, n-1\}, \{a\}, \delta, 0, 0)$ состоит из множества состояний $\{0, 1, \dots, n-1\}$, входного алфавита $\{a\}$, начального состояния 0, заключительного состояния 0 и функции переходов δ такой, что $\delta(i, a) = i + 1 \pmod{n}$ и $\delta(i, a^m) = i + m \pmod{n}$. Из определения следует, что автомат $[n]$ допускает язык $\{a^{kn} | k \in \mathbb{Z}^+\}$. Через $[0] = (\{0, 1, 2, \dots\}, \{a\}, \delta, 0, 0)$ обозначим автомат, в котором $\delta(n, a) = n + 1$. Язык, допускаемый автоматом $[0]$, состоит из пустого слова. Обозначим класс автоматов $\{[0], [1], [2], \dots\}$ через $\mathbb{Z}^+$, который далее будем называть *допустимым* классом. Примеры автоматов $[1]$, $[2]$ и $[3]$ показаны на рис. 2.

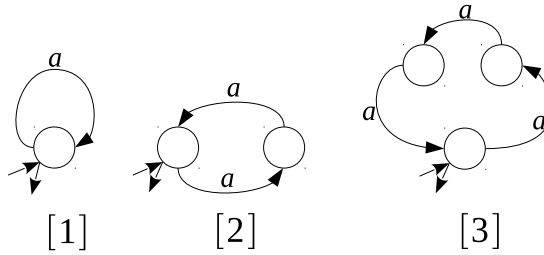


Рис. 2. Автоматы $[1]$, $[2]$, $[3]$

Гомоморфизм из автомата $[n]$ в автомат $[m]$ существует тогда и только тогда, когда число m делит число n . Введем операции $\vee$ и $\wedge$ на автоматах класса $\mathbb{N}$: $[n] \vee [m] = \text{gcd}(n, m)$ (gcd – наибольший общий делитель) наибольший по числу состояний автомат, в который есть гомоморфизм как из $[n]$, так и из $[m]$; $[n] \wedge [m] = \text{lcm}(n, m)$ (lcm – наименьшее общее кратное) наименьший по числу состояний автомат, из которого есть гомоморфизм как в $[n]$, так и в $[m]$. Например, $[n] \vee [1] = [1]$ и $[n] \wedge [1] = [n]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Считаем по определению, что

$[n] \vee [0] = [n]$, $[n] \wedge [0] = [0]$. Класс автоматов $\mathbb{Z}^+$ является полной решёткой без дополнений, фрагмент которой проиллюстрирован на рис. 3.

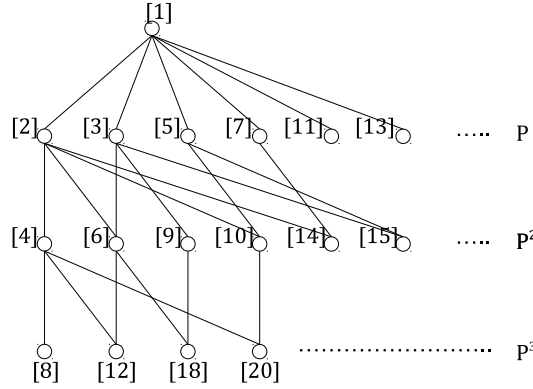


Рис. 3. Фрагмент решётки автоматов класса $\mathbb{Z}^+$

Слово a^n длины n в алфавите $\{a\}$ далее обозначаем числом n и будем говорить, что автомат допускает не множество слов, а множество чисел. Для примера, автомат $[n]$ допускает множество чисел $\{0, n, 2n, 3n, \dots\} = \{nk | k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Для класса автоматов $\mathbb{Z}^+$, когда $\rho \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, правила конгруэнтного замыкания выглядят так (мы пишем $n = t$ вместо $(n, t) \in \rho$):

$$\frac{n = m, \quad m = l}{n = l}, \quad \frac{n = m}{m = n}, \quad \frac{n = m}{n = n}, \quad \frac{n = m}{n + l = m + l}.$$

Поскольку автоматы класса $\mathbb{Z}^+$ имеют циклическую структуру и начальное состояние совпадает с заключительным, к указанным правилам замыкания $[\cdot]$ добавим правило:

$$\frac{n = m}{|n - m| = 0},$$

где $|n - m|$ — абсолютное значение числа $n - m$. Эти пять правил образуют правила $\mathbb{Z}^+$ -допустимого замыкания. Результатом замыкания произвольного отношения $\rho \subseteq \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ всегда будет автомат класса $\mathbb{Z}^+$. Очевидно, что равенство $n = 0$ является определяющим соотношением автомата $[n]$.

Примеры представлений для автоматов из класса допустимых автоматов $\mathbb{Z}^+$:

$$\text{co-Fr}(1 = 0) \cap \text{contra-Fr}(1 = 0) = \mathbb{P} = \{[2], [3], [5], [7], \dots\}$$

$$\text{co-Fr}(2 = 0) \cap \text{contra-Fr}(1 = 0) = \{[2]\}$$

$$\text{co-Fr}(1 = 0) \cap \text{contra-Fr}(1 = 0) \cap \text{Fr}(6 = 0) \cap \text{co-contra-Fr}(6 = 0) = \{[2], [3]\}$$

Очевидно, $\text{Fr}([0]) = \text{co-Fr}([1]) = \mathbb{Z}^+$, то есть фрагмент $0 = 0$ и кофрагмент $1 = 0$ не накладывают ограничений на представление автоматов. Рассмотрим подкласс $\text{contra-Fr}([1])$ класса $\mathbb{Z}^+$. Очевидно, что $\text{contra-Fr}([1]) = \mathbb{Z}^+ - \{[1]\} =$

$= \{[2], [3], [4], \dots\} \cup \{[0]\}$. Этот класс не является решеткой. Таким образом, верна теорема:

Теорема. *Подкласс класса $\mathbb{Z}^+$, задаваемый фрагментом и/или кофрагментом, является полной решёткой. Подкласс, задаваемый контрфрагментом или коконтрфрагментом, является полурешёткой. Подкласс задаваемый, контрфрагментом и коконтрфрагментом, не является в общем случае ни решёткой, ни полурешёткой.*

1. Davide Sangiorgi Introduction to Bisimulation and Coinduction, Cambridge University Press, 2012.
2. Davide Sangiorgi and Jan Rutten (eds) Advanced Topics in Bisimulation and Coinduction, Cambridge University Press, 2012.
3. Jan J. M. M. Rutten Universal coalgebra: a theory of systems. – Theor. Comput. Sci. – 2000. – **249**, no 1. – P. 3–80.
4. Грунский И.С., Козловский В.А., Пономаренко Г.Г. Представление конечных автоматов фрагментами поведения. – Киев: Наукова думка, 1990. – 232 с.
5. Грунский И.С. Анализ поведения конечных автоматов. – Луганск: Изд-во Луганск. гос. пед. ун-та, 2003. – 318 с.
6. Грунский И.С., Козловский В.А. Синтез и идентификация автоматов. – Киев: Наукова думка, 2004. – 247 с.
7. Кудрявцев В.Б., Грунский И.С., Козловский В.А. Анализ поведения автоматов. – Дискрет. матем. – 2009. – **21**, № 1. – С. 3–35.
8. Кудрявцев В.Б., Грунский И.С., Козловский В.А. Восстановление автоматов по фрагментам поведения. – Дискрет. матем. – 2009. – **21**, № 2. – С. 3–42.
9. Кудрявцев В.Б., Грунский И.С., Козловский В.А. Анализ и синтез абстрактных автоматов. – Фундамент. и прикл. матем. – 2009. – **15**, № 4. – С. 101–175.
10. Грунский И.С., Сенченко А.С. Свойства систем определяющих соотношений для автоматов. – Дискрет. матем. – 2004. – **16**, № 4. – С. 79–87.
11. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. – 4-е изд., испр. – М.: МЦМНО, 2012. – 240 с.

О. Kurganskyy, A. J. Maksimova

On co-counter-fragments of behaviour of automata.

This paper contains results related to synthesis and presentation of abstract automata by fragments of behaviour and investigates the structure of the classes of finite connected initial output-less automata specified by systems of defining relations considered as fragments, co-fragments, counter-fragments and co-counter-fragments of automata.

Keywords: *fragments, co-fragments, counter-fragments, co-counter-fragments, systems of defining relations, presentation of automata.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
kurgansk@iamm.su

Получено 26.05.17

УДК 517.983.36

©2017. Д. В. Лиманский

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ БОМАНА И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СИСТЕМ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье получены обобщения известной теоремы Бомана об оценках в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ для дифференциальных мономов для случая произвольных дифференциальных операторов. Кроме того, рассмотрено приложение этих результатов для доказательства априорных оценок для тензорного произведения минимальных дифференциальных полиномов в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ключевые слова: дифференциальный полином, априорная оценка, многогранник Ньютона.

1. Введение. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов порядка l :

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_{j,\alpha}(x) D^\alpha, \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (1)$$

с коэффициентами $a_{j,\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$. Рассматривается задача об описании линейного пространства $\mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(x, D)$, удовлетворяющих априорной оценке

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2)$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от выбора f . При выполнении неравенства (2) будем говорить, что оператор $Q(x, D)$ *подчинен* системе операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в пространстве $L^p(\Omega)$ и писать $Q \in \mathcal{L}_{p,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$.

Эта задача была исчерпывающе решена Л. Хёрмандером [1] в случае одного оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами, $p = 2$ и ограниченной области Ω . Применяя этот критерий, Хёрмандер доказал, что для *тензорного произведения*

$$P(D) = P_1(D) \otimes P_2(D) := P_1(D_1, \dots, D_{p_1}, 0, \dots, 0) P_2(0, \dots, 0, D_{p_1+1}, \dots, D_n) \quad (3)$$

двух дифференциальных операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$, действующих по различным группам переменных, пространство $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений операторов из $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P_k)$, $k = 1, 2$, т. е. равно тензорному произведению этих пространств, $\mathcal{L}_{2,\Omega}(P) = \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathcal{L}_{2,\Omega}(P_2)$ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [2, 3] Система дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ порядка l вида (1) называется *эллиптической*, если соответствующие l -главные символы $\{P_j^{l(x,\xi)}\}_1^N$ не имеют общих нетривиальных вещественных нулей (по ξ) при всех $x \in \Omega$, т. е.

$$(P_1^{l(x,\xi)}, \dots, P_N^{l(x,\xi)}) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Хорошо известно, что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j,\alpha}(\cdot)$ и область Ω (в частности, когда коэффициенты постоянны и область ограничена) система (1) эллиптична тогда и только тогда, когда априорная оценка (2) справедлива для всех дифференциальных операторов $Q(x, D)$ порядка $\leq l$ при $p \in (1, \infty)$ (см. [2]). При $p = 1; \infty$ этот критерий утрачивает силу. Так, например, при $p = 1$ (и $N = 1$) Орнштейном [4] доказана невозможность оценки (2) для дифференциальных полиномов $Q(D) = D_1 D_2$ и $P_1(D) = D_1^2 + D_2^2$. Кроме того, М. М. Маламудом [5] доказано, что при $p = \infty$ из оценки (2) вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(x) P_j^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

для l -главных символов операторов $Q(x, D)$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами это утверждение доказано ранее де Лю и Миркилом [6]). Из этого результата вытекает, что включение $Q \in \mathcal{L}_{\infty, \Omega}(P_1, \dots, P_N)$ для оператора $Q(x, D)$ порядка l возможно лишь в исключительных случаях. Вместе с тем оценка (2) при $p = \infty$ выполняется для эллиптической системы (1) порядка l и произвольного дифференциального оператора $Q(x, D)$ порядка $< l$ (см. [5]). Для дифференциального полинома $P(D)$ порядка $l \geq 2$ от $n \geq 3$ переменных справедливо и обратное утверждение: оценка (2) для всех $Q(D) = D^\alpha$, $|\alpha| < l$, в норме $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна эллиптичности $P(D)$ (см. [6]).

В дальнейшем в статье будут рассматриваться априорные оценки лишь в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Норму в этом пространстве будем обозначать через $\|\cdot\|_\infty$, а пространство подчиненных операторов $\mathcal{L}_{\infty, \mathbb{R}^n}(P_1, \dots, P_N)$ через $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$.

Боманом [7] было получено описание пространства $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ в случае, когда $Q(D) = D^\beta$ и $\{P_j(D)\}_1^N = \{D^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ – дифференциальные мономы (см. теорему 2). Оказалось, что структура этого пространства тесно связана с геометрическими свойствами *многогранника Ньютона* символов ξ^α – выпуклой оболочки показателей $\alpha \in \mathcal{A}$ (см. [3, 8], а также определение 4). В настоящей работе этот результат обобщен (в сторону необходимости) для случая произвольных символов $Q(\xi)$ и $\{P_j(\xi)\}_1^N$ (теоремы 3 и 4).

Будем называть полином $P(\xi)$ *невыврожденным*, если он не имеет вещественных нулей, т. е. $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. В связи с вышеприведенным результатом Хёрмандера, возникает задача об описании пространств $\mathcal{L}(P)$ для операторов $P(D)$ вида (3). В [9] эта задача была поставлена для случая тензорного произведения двух эллиптических дифференциальных полиномов $P_1(D)$ и $P_2(D)$. Оказалось, что наличие младших членов в символах $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ существенно: например, в случае однородных эллиптических полиномов размерность пространства $\mathcal{L}(P_1 \otimes P_2)$ минимальна, хотя размерность каждого из пространств $\mathcal{L}(P_1)$ и $\mathcal{L}(P_2)$ максимально возможная [10]. В случае же тензорного произведения двух невырожденных эллиптических операторов размерность $\mathcal{L}(P_1 \otimes P_2)$, наоборот, максимальна [9].

В работах автора [11, 12] пространство $\mathcal{L}(P)$ описано в случае $n = 2$ и тензорного произведения $P(D) = p_1(D_1) \otimes p_2(D_2)$ двух обыкновенных дифференциальных операторов, символы которых имеют как вещественные, так и невещественные нули различной кратности. При этом прослежен эффект зависимости размерности $\mathcal{L}(P)$ как от структуры нулей символов-сомножителей $p_1(\xi_1)$ и $p_2(\xi_2)$, так и от строения многоугольника Ньютона полинома $P(\xi)$.

Как отмечалось выше, в настоящей работе получены необходимые условия включения $Q \in \mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ в терминах многогранника Ньютона полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^N$, которые являются обобщениями соответствующих геометрических условий теоремы 2 Бомана (теоремы 3 и 4). В пункте 6 эти результаты применены для описания пространства $\mathcal{L}(P)$ в случае тензорного произведения $P = P_1 \otimes P_2$ двух дифференциальных полиномов специального вида, первый из которых – однородный эллиптический порядка $2l$, а второй – невырожденный первого порядка (теорема 5). Полученный результат показывает, что в этом случае пространство $\mathcal{L}(P)$ имеет промежуточную размерность – между минимально и максимально возможной. Таким образом, работа продолжает исследования задачи, поставленной в [9].

Эта статья посвящена светлой памяти моего отца Лиманского Владимира Васильевича (1948 – 2017), известного ученого-математика в области теории групп, преподавателя Донецкого национального университета, отличника народного образования Украины.

Обозначения.

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{N}$ – множества, соответственно, вещественных, комплексных и натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \dots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \dots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Пусть также $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через I тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, $\Delta := D_1^2 + \dots + D_n^2$ – оператор Лапласа, $\mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$ – множество конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ – алгебру мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, $\mathcal{F}f = \hat{f}$ – преобразование Фурье функции или меры $f(\cdot)$. Для дифференциального полинома $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha$ порядка l обозначим $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha \xi^\alpha$ его символ и $\deg P$ – его степень. Через $\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$ будет обозначаться многогранник Ньютона полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^N$.

Обозначим через $\text{ch } K$ *выпуклую оболочку* множества $K \subset \mathbb{R}^n$, т. е. наименьшее выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее K в качестве своего подмножества. Также через $\text{int } K$ будет обозначаться множество внутренних точек (внутренность) множества K , а через ∂K – множество его граничных точек (граница). Через $\dim L$ будет обозначаться размерность линейного подмногообразия $L \subset \mathbb{R}^n$.

Через $C^\infty(\Omega)$ обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, через $C_0(\Omega)$ – множество непрерывных финитных (с компактным носителем) функций в Ω , а через $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ – множество бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций.

2. Мультипликаторы и априорные оценки в L^∞ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [13] Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx.$$

Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называют **мультипликатором** в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если существует линейный ограниченный в $L^p(\mathbb{R}^n)$ оператор T_Φ такой, что

$$\widehat{T_\Phi f}(\xi) = \Phi(\xi) \widehat{f}(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n).$$

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Известно полное описание этой алгебры при $p = 1, 2, \infty$. Нас интересует описание алгебры $\mathcal{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{M}$. Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. [13] Алгебра $\mathcal{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье, т. е. $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mathcal{BV}(\mathbb{R}^n))$.

Из предложения 1 следует, что все функции $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathcal{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x - h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$. Наконец, отметим, что $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ (см. [13]).

Предложение 1 также дает возможность указать примеры «элементарных» мультипликаторов в L^∞ , для которых порождающая их мера μ строится явно. Так, функция $(\xi_1 + i)^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, поскольку является преобразованием Фурье конечной меры $\mu \in \mathcal{BV}(\mathbb{R})$ на прямой с плотностью $d\mu(t) = -i\chi(t)e^{-t}dt$, где $\chi(t)$ – характеристическая функция полуоси $(0, +\infty)$ (функция Хевисайда):

$$\widehat{\mu}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 t} d\mu(t) = -i \int_0^{+\infty} e^{it\xi_1} e^{-t} dt = -\frac{-i}{i\xi_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1 + i}.$$

Кроме того, функция $\xi_1(\xi_1 + i)^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ как разность мультипликаторов $1 = \widehat{\delta}$ и $(\xi_1 + i)^{-1}$ (здесь δ – дельта-мера Дирака на прямой).

Априорные оценки и мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ связаны следующим образом.

Теорема 1 (де Лю и Миркила). [6] Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ – дифференциальные полиномы, $D = (D_1, \dots, D_n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_\infty \leq C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (4)$$

справедлива тогда и только тогда, когда существуют мультипликаторы $M_j(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq N$ такие, что выполняется тождество

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Доказательство.

(i) *Необходимость.* Пусть справедлива априорная оценка (4). Рассмотрим линейный функционал

$$\mathcal{F} : \{P_j(D)f\}_1^N \mapsto [Q(D)f](0),$$

где $f(\cdot)$ пробегает множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В силу оценки (4), функционал $\mathcal{F}$ ограничен в норме пространства $K := C_0(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times C_0(\mathbb{R}^n)$ (n сомножителей). Значит, по теореме Хана–Банаха, он может быть продолжен до ограниченного линейного функционала $\tilde{\mathcal{F}}$ на K . Тогда, по теореме Рисса об общем виде ограниченного линейного функционала, имеем интегральное представление

$$\tilde{\mathcal{F}}\{P_j(D)f\}_1^N = [Q(D)f](0) = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} [P_j(D)f] d\mu_j, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (6)$$

где $\{\mu_j\}_1^N$ – конечные борелевские меры в $\mathbb{R}^n$.

Обозначим $M_j(\xi) := \widehat{\mu_j}(\xi)$, $1 \leq j \leq N$. Так как

$$[Q(D)f](0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{Q(D)f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} Q(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_j(D)f d\mu_j = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{P_j(D)f}(\xi) \widehat{\mu_j}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} P_j(\xi) f(\xi) M_j(\xi) d\xi$$

для всех $j \in \{1, \dots, N\}$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то из представления (6) получаем:

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi) \right] \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Так как множество функций $\{\widehat{f} : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, из последнего равенства вытекает тождество (5).

(ii) *Достаточность.* Пусть выполнено тождество (5). Умножая обе его части на $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, получим

$$\widehat{Q(D)f}(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) \widehat{P_j(D)f}(\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (7)$$

Так как $M_j(\cdot)$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то существуют линейные ограниченные в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ операторы T_j такие, что

$$\widehat{Q(D)f}(\xi) = \sum_{j=1}^N \mathcal{F}[T_j(P_j(D)f)](\xi), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (8)$$

Применим теперь к обеим частям (8) обратное преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}$:

$$[Q(D)f](x) = \sum_{j=1}^N T_j(P_j(D)f)(x), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (9)$$

Обозначая $C := \max_{1 \leq j \leq N} \|T_j\|_{L^\infty \rightarrow L^\infty} (< \infty)$, имеем

$$\|T_j(P_j(D)f)\|_\infty \leq C\|P_j(D)f\|_\infty, \quad 1 \leq j \leq N, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

что вместе с (9) влечет априорную оценку (4). Теорема полностью доказана. $\square$

Так как мультипликаторы $M_j(\cdot)$ в тождестве (5) ограничены, из теоремы 1 де Лю и Миркила вытекает важное следствие.

Следствие 1. Из априорной оценки (4) для дифференциальных операторов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ вытекает алгебраическое неравенство для их символов:

$$|Q(\xi)| \leq C \sum_{j=1}^N |P_j(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (10)$$

Замечание 1. Неравенство (10) справедливо при выполнении априорной оценки (4) в норме $L^p(\mathbb{R}^n)$ для любого $p \in [1, \infty]$ (см. [9]).

Определение 3. Назовем **координатным подпространством** в $\mathbb{R}^n$ размерности $k \in [0, n]$ подмножество в $\mathbb{R}^n$ вида

$$L_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{j_1} = \xi_{j_2} = \dots = \xi_{j_{n-k}} = 0\},$$

где $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{n-k} \leq n$ – возрастающая последовательность индексов. При $k = 0$ $L_0 = \{0\}$, а при $k = n$ полагаем $L_n := \mathbb{R}^n$.

Ввиду важности следующего результата приведем его с доказательством.

Лемма 1 (Бомана). [7] Пусть $M(\cdot)$ – мультипликатор в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $r_1, \dots, r_q$ ($q \leq n$) – ненулевые вещественные числа. Рассмотрим функцию

$$M_t(\xi) := M(t^{r_1}\xi_1, \dots, t^{r_q}\xi_q, \xi_{q+1}, \dots, \xi_n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (11)$$

Тогда существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} M_t(\xi) = \Lambda(\xi_{q+1}, \dots, \xi_n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (12)$$

где $\Lambda(\cdot)$ – мультипликатор в $L^\infty(\mathbb{R}^{n-q})$ при $q < n$ и константа при $q = n$.

Доказательство. Из свойств мультипликаторов в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ вытекает, что функции $M_t \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ для любого $t > 0$. Обозначим через $\mu_t \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$ конечную меру, порождающую функцию $M_t(\cdot)$ вида (11), т. е. $\hat{\mu}_t(\xi) = M_t(\xi)$. Далее, для функции $\varphi(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ полагаем

$$\varphi_t(\xi) := \varphi(t^{r_1}\xi_1, \dots, t^{r_q}\xi_q, \xi_{q+1}, \dots, \xi_n), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Ясно, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(\xi) d\mu_1(\xi), \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Без ограничения общности можно предположить, что $r_j > 0$ при $1 \leq j \leq k$ и $r_j < 0$ при $k+1 \leq j \leq q$, где $k \leq q$. Пусть $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция начала координат в $\mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(\xi) = \varphi(0, \dots, 0, \xi_{q+1}, \dots, \xi_n) \cdot \prod_{j=1}^k \chi(\xi_j) := \Psi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Так как функции (13) равномерно ограничены (по параметру t) и функция $\Psi(\cdot)$ μ -измерима, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu_t(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_t(\xi) d\mu_1(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi) d\mu_1(\xi). \quad (15)$$

Определим теперь конечную меру $\mu \in \mathcal{BV}(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(\xi) d\mu_1(\xi), \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n), \quad (16)$$

где $\Psi(\cdot)$ – функция (14). Из (15) и (16) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu_t(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu(\xi), \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n), \quad (17)$$

т. е. последовательность мер μ_t слабо сходится к мере μ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда для каждой функции $\varphi(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, равной нулю на координатном подпространстве $L := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = \dots = \xi_q = 0\}$, предел (14) равен нулю тождественно, $\Psi \equiv 0$, и в силу (16) и (17)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) d\mu(\xi) = 0, \quad \varphi \in C_0(\mathbb{R}^n) : \quad \varphi = 0 \text{ на } L.$$

Последнее равенство означает, что носитель меры μ содержится в L и, значит, функция $\Lambda(\xi) := \widehat{\mu}(\xi)$ не зависит от $\xi_1, \dots, \xi_q$. Но из слабой сходимости мер $\mu_t \rightarrow \mu$ вытекает поточечная сходимость их преобразований Фурье $\widehat{\mu}_t(\cdot) \rightarrow \widehat{\mu}(\cdot)$, или $M_t(\cdot) \rightarrow \Lambda(\cdot)$ при $t \rightarrow +\infty$, т. е. соотношение (12). Лемма доказана. $\square$

3. Теорема Бомана и многогранник Ньютона. Пусть B – некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Если $B \subset L_k$, где L_k – k -мерное линейное подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, то обозначим через $\text{int}_k(B)$ множество внутренних точек B относительно индуцированной метрики в L_k . Это понятие определено корректно, так как не зависит от выбора подмногообразия L_k : если $B \subset L_k \cap L'_k$, где $\dim L_k = \dim L'_k = k$, то $\text{int}_k(B) = \emptyset$. Отметим, что при $k = n$ $\text{int}_n(B) = \text{int}(B)$, а при $k = 0$ полагаем $\text{int}_0(B) := B$.

В работе [7] Боман получил необходимые и достаточные условия подчиненности дифференциального монома в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ произвольной системе других мономов. Приведем сначала этот результат в том виде, в котором он изложен в [7].

Теорема 2 (Бомана). [7] Пусть $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\mathcal{A}$ – конечное подмножество $\mathbb{Z}_+^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

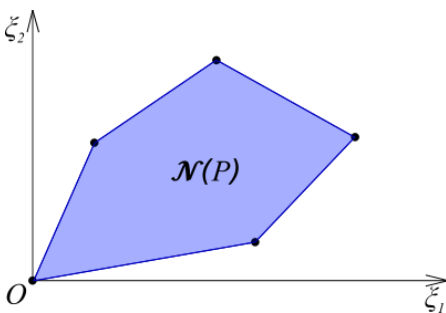
(А) существует константа C такая, что

$$\|D^\beta f\|_\infty \leq C \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \|D^\alpha f\|_\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \quad (18)$$

(В) существует целое $k \in [0, n]$ и k -мерное линейное подмногообразие $L_k \subset \mathbb{R}^n$, параллельное k -мерному координатному подпространству в $\mathbb{R}^n$, такое, что

$$\beta \in \text{int}_k(\text{ch}(L_k \cap \mathcal{A})).$$

Мы видим, что наличие априорной оценки (18) – условия (А) – связано с выполнением некоторого геометрического условия (В), в котором фигурирует выпуклое тело, образованное мультииндексами мономов в правой части (18). Для большей наглядности удобно ввести в рассмотрение это тело в общей ситуации.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. [3, 8] Пусть $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^N$ – конечные подмножества в $\mathbb{Z}_+^n$. **Многогранником Ньютона** (м. Н.) системы полиномов

$$P_j(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} a_{j\alpha} \xi^\alpha, \quad 1 \leq j \leq N,$$

будем называть *выпуклую оболочку объединения* множеств $\mathcal{A}_j$ и обозначать ее через

Рис. 1. Пример м. Н. полинома P

$$\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N) := \text{ch} \cup_{j=1}^N \mathcal{A}_j.$$

Геометрически многогранник Ньютона представляет собой замкнутое ограниченное тело, полученное пересечением конечного числа гиперпространств вида $a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n \leq c$ в $\mathbb{R}^n$ (см. рис. 1).

Сделаем важное для дальнейшего уточнение. Так как подчиненность $Q \in \mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$ мы определили как условие, эквивалентное априорной оценке (2), то из-за наличия в ее правой части нормы $\|f\|$ тождественного оператора $If = f$ целесообразно считать, что в многогранник Ньютона как одного оператора, так и системы нескольких операторов всегда входит начало координат $\mathbf{0} := (0, \dots, 0)$ независимо от того, содержится ли константа в записи соответствующих символов.

Для дальнейшего важен вопрос о том, что мы будем считать гранями многогранника $\mathcal{N}$. Казалось бы, геометрически этот вопрос ясен. Грани – это участки

границы $\partial\mathcal{N}$, полученные ее пересечением с линейными подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$ различной размерности. В число граней целесообразно включить не только гиперплоскости (размерности $n-1$), но и вершины (размерности 0), ребра (размерности 1) и т. д. Но такое геометрическое определение неудобно с точки зрения оперирования с аналитическими объектами. Приведем наиболее удачное, на наш взгляд, определение грани многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. [3, 8] Пусть $\mathcal{N}$ – многогранник, ν – произвольный единичный вектор в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $|\nu| = 1$). Множество

$$\Gamma := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, \nu \rangle = \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle\} \quad (19)$$

назовем **гранью** многогранника $\mathcal{N}$, а вектор ν – ее **внешней нормалью**.

Данным определением непустое множество Γ определено однозначно, так как для каждого единичного вектора ν непрерывная функция $\langle \eta, \nu \rangle = \eta_1 \nu_1 + \dots + \eta_n \nu_n$ достигает своего наибольшего значения на компакте $\mathcal{N}$. Кроме того, определение 5 восходит к принципам линейного программирования: грань Γ получается как пересечение опорной «гиперплоскости уровня» $\langle \eta, \nu \rangle = C$, перпендикулярной вектору ν , с многогранником $\mathcal{N}$, при наибольшем возможном значении C . Это пересечение может произойти как в одной точке (вершине многогранника – грани размерности 0), по отрезку прямой (ребру многогранника – грани размерности 1) и т. д., так и по части гиперплоскости – грани размерности $n-1$.

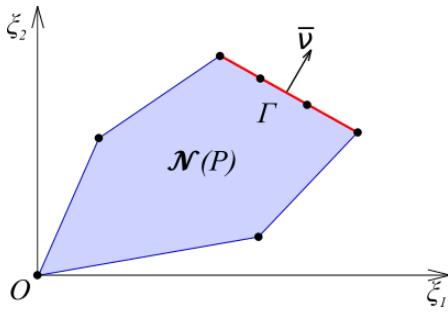


Рис. 2. Грань м. Н. полинома P

Заметим также, что внешняя нормаль грани Γ может определяться неоднозначно, т. е. грань может иметь более одной внешней нормали. Вместе с тем каждому единичному вектору ν соответствует единственная грань Γ по правилу (19) (см. рис. 2).

Исходя из определения 5, теперь легко дать аналитическое описание внутренних, граничных и внешних точек многогранника $\mathcal{N}$:

- 1) β – внутренняя точка $\mathcal{N}$ ($\beta \in \text{int } \mathcal{N}$) тогда и только тогда, когда для любого единичного вектора ν справедливо неравенство $\langle \beta, \nu \rangle < \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle$;
- 2) β – граничная точка $\mathcal{N}$ ($\beta \in \partial \mathcal{N}$) тогда и только тогда, когда $\beta \in \mathcal{N}$ и найдется единичный вектор ν такой, что $\langle \beta, \nu \rangle = \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle$;
- 3) β – внешняя точка $\mathcal{N}$ ($\beta \notin \mathcal{N}$) тогда и только тогда, когда найдется единичный вектор ν такой, что $\langle \beta, \nu \rangle > \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle$.

Кроме того, ясно, что *число граней любого многогранника Ньютона конечно*. В самом деле, м. Н. $\mathcal{N}$ задается системой линейных неравенств вида

$$\langle \xi, \nu \rangle \leq \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu \rangle := C, \quad |\nu| = 1, \quad (20)$$

среди которых лишь конечное число линейно независимых и, значит, число единичных векторов ν в системе (20), которые и определяют совокупность различных

граней $\mathcal{N}$, также конечно (см. [3]).

С помощью многогранника Ньютона дадим другую формулировку теоремы 2 Бомана, приведенной в начале этого пункта.

Теорема 2'. [7] Пусть $\mathcal{A}$ – конечное подмножество в $\mathbb{Z}_+^n$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ и $\mathcal{N}$ – многогранник Ньютона системы мономов $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Тогда априорная оценка (18) выполнена тогда и только тогда, когда β – либо внутренняя точка многогранника $\mathcal{N}$, либо принадлежит его грани, параллельной одному из k -мерных координатных подпространств в $\mathbb{R}^n$, где $0 \leq k \leq n-1$.

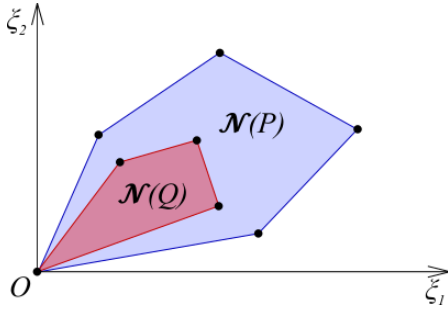
4. Первое обобщение теоремы Бомана. Из теоремы 2, в частности, следует, что если справедлива оценка (18) для дифференциальных мономов, то $\beta \in \mathcal{N}$, т. е. точка β не может быть внешней для многогранника Ньютона $\mathcal{N}$. Этот факт легко обобщается на случай м. Н. произвольной системы полиномов. В частности, для априорной оценки

$$\|D^\beta f\|_\infty \leq C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (21)$$

это является тривиальным следствием теоремы 2. В самом деле, обозначая множество мультииндексов, входящих в запись полинома $P_j(\xi)$, через $\mathcal{A}_j$ ($1 \leq j \leq N$), получим, что из неравенства (21) вытекает оценка

$$\|D^\beta f\|_\infty \leq C' \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} \|D^\alpha f\|_\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

откуда, по теореме 2, $\beta \in \mathcal{N}(\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \cup_{j=1}^N \mathcal{A}_j}) = \mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$.



Докажем аналогичное свойство в случае, когда в левой части (21) вместо дифференциального монома D^β стоит произвольный оператор $Q(D)$.

Теорема 3. Если для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_{j=1}^N$ справедлива априорная оценка (4), то справедливо включение

$$\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P_1, \dots, P_N).$$

Рис. 3. Иллюстрация к теореме 3

Доказательство. Пусть

$$Q(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} a_{0,\alpha} \xi^\alpha, \quad P_j(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} a_{j,\alpha} \xi^\alpha, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (22)$$

где $\{\mathcal{A}_j\}_0^N$ – конечные подмножества в $\mathbb{Z}_+^n$. Предположим противное, т. е. что $\mathcal{A}_0 \not\subset \mathcal{N} := \mathcal{N}(P_1, \dots, P_N) = \text{ch } \cup_{j=1}^N \mathcal{A}_j$. Значит, найдется мультииндекс $\beta \in \mathcal{A}_0$ такой,

что $\beta \notin \mathcal{N}$. Это означает (см. классификацию точек м. Н. выше), что найдется единичный вектор ν' такой, что

$$\langle \beta, \nu' \rangle > \max_{\eta \in \mathcal{N}} \langle \eta, \nu' \rangle. \quad (23)$$

При $t > 0$ рассмотрим вектор-функцию

$$\xi(t) := (\xi_1 t^{\nu'_1}, \xi_2 t^{\nu'_2}, \dots, \xi_n t^{\nu'_n}), \quad \text{где } \xi_k \neq 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (24)$$

Согласно следствию 1, из априорной оценки (4) вытекает алгебраическое неравенство (10) для символов $Q(\xi)$ и $\{P_j(\xi)\}_1^N$ соответствующих дифференциальных полиномов. Подставляя (24) в (10), получим:

$$\left| a_{0,\beta} \xi^\beta \cdot t^{\langle \beta, \nu' \rangle} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0 \setminus \{\beta\}} a_{0,\alpha} \xi^\alpha \cdot t^{\langle \alpha, \nu' \rangle} \right| \leq C \sum_{j=1}^N \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} a_{j,\alpha} \xi^\alpha \cdot t^{\langle \alpha, \nu' \rangle} \right|. \quad (25)$$

Деля теперь обе части (25) на $t^{\langle \beta, \nu' \rangle}$, с учетом (23) и того, что $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{N}$ для всех $j \in \{1, \dots, N\}$, получим:

$$\left| a_{0,\beta} \xi^\beta + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0 \setminus \{\beta\}} a_{0,\alpha} \xi^\alpha \cdot t^{\langle \alpha - \beta, \nu' \rangle} \right| \leq o(t), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (26)$$

Неравенство (26) противоречиво, так как по нашему предположению $a_{0,\beta} \neq 0$. В самом деле, если в левой части (26) есть слагаемые с неотрицательной степенью t , то в силу линейной независимости мономов $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_0}$ над полем $\mathbb{C}$ эти степени не сократятся и поэтому выражение в левой части (26) не стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Если же $\langle \alpha - \beta, \nu' \rangle < 0$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}_0 \setminus \{\beta\}$, то выражение в левой части (26) при $t \rightarrow +\infty$ стремится к $|a_{0,\beta} \xi^\beta| \neq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

5. Второе обобщение теоремы Бомана. Обратимся теперь к понятию главной части дифференциального полинома. Стандартное ее определение гласит, что, скажем, если

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha D^\alpha$$

— оператор порядка l , то главная его часть определяется как сумма тех слагаемых, входящих в запись $P(D)$, порядок которых в точности равен l , т. е.

$$P^l(D) := \sum_{|\alpha|=l} a_\alpha D^\alpha.$$

Геометрически это означает, что в полиноме $P(\xi)$ взяты мономы ξ^α , лежащие на грани м. Н. $\mathcal{N}(P)$, соответствующей опорной гиперплоскости $|\alpha| = l$, отсекающей на осях координат точки вида $(0, \dots, l, \dots, 0)$. При этом остальные возможные грани многогранника $\mathcal{N}(P)$ не принимаются во внимание.

Для дальнейшего целесообразно расширить понятие главной части дифференциального оператора, отнеся к ней мономы, лежащие на каждой из граней его м. Н. То есть главных частей у данного оператора может быть несколько.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. [3] Пусть $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} a_\alpha \xi^\alpha$ – полином, $\mathcal{N}(P)$ – его многогранник Ньютона. Пусть также ν – произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^n$, Γ – соответствующая грань м. Н. $\mathcal{N}(P)$. Тогда ν -**главной частью** полинома $P(\xi)$ (относительно $\mathcal{N}(P)$) будем называть следующий полином:

$$P^\nu(\xi) := \sum_{\alpha \in \Gamma \cap \mathcal{A}} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Ясно, что так как граней у многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P)$ конечное число, то и число ν -главных частей полинома $P(\xi)$ также конечно.

Зададимся вопросом, какие условия необходимы для выполнения априорной оценки (4) в случае, если в записи полинома $Q(\xi)$ содержатся мономы ξ^α с мультииндексами α , являющимися граничными точками многогранника $\mathcal{N}(P)$.

Теорема 4. Пусть операторы $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ удовлетворяют априорной оценке (4), $Q^\nu(\xi)$ и $\{P_j^\nu(\xi)\}_1^N$ – ν -главные части соответствующих им символов относительно многогранника Ньютона $\mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$ системы $\{P_j(\xi)\}_1^N$. Тогда:

(i) если все компоненты вектора ν отличны от нуля, т. е. соответствующая грань м. Н. $\mathcal{N}(P)$ не параллельна ни одной из осей координат, то справедливо тождество

$$Q^\nu(\xi) = \sum_{j=1}^N c_j P_j^\nu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

с некоторыми константами $c_j \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j \leq N$);

(ii) если ровно k ($0 < k < n$) компонент вектора ν равны нулю, например, $\nu_j \neq 0$ при $1 \leq j \leq n-k$ и $\nu_j = 0$ при $n-k+1 \leq j \leq n$, т. е. соответствующая ему грань м. Н. $\mathcal{N}(P)$ параллельна k -мерному координатному подпространству

$$L_k := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_{n-k+1} = \dots = \xi_n = 0\},$$

то справедливо тождество

$$Q^\nu(\xi) = \sum_{j=1}^N \Lambda_j(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n) P_j^\nu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $\Lambda_j(\cdot)$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^k)$ ($1 \leq j \leq N$).

Доказательство. Пусть полиномы $Q(\cdot)$ и $\{P_j(\cdot)\}_1^N$ имеют вид (22). Обозначим

$$d := \max_{\eta \in \mathcal{N}(P)} \langle \eta, \nu \rangle,$$

так что все точки $\alpha \in \cup_{j=1}^N \mathcal{A}_j$ удовлетворяют неравенству $\langle \alpha, \nu \rangle \leq d$. Так как по теореме 3 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(P_1, \dots, P_N)$, то этому же неравенству удовлетворяют и точки $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Таким образом, полиномы $Q(\xi)$ и $\{P_j(\xi)\}_1^N$ можно записать в виде

$$Q(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0: \langle \alpha, \nu \rangle = d} a_{0,\alpha} \xi^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0: \langle \alpha, \nu \rangle < d} a_{0,\alpha} \xi^\alpha = Q^\nu(\xi) + \dots \quad (27)$$

и

$$P_j(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j: \langle \alpha, \nu \rangle = d} a_{j,\alpha} \xi^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j: \langle \alpha, \nu \rangle < d} a_{j,\alpha} \xi^\alpha = P_j^\nu(\xi) + \dots, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (28)$$

где многоточие обозначает суммы мономов ξ^α , отвечающих неравенству $\langle \alpha, \nu \rangle < d$.

Согласно теореме 1, априорная оценка (4) эквивалентна тождеству (5), в котором $M_j(\cdot)$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq N$. Как и в теореме 3, рассмотрим вектор-функцию (24) и подставим ее в неравенство для символов (10). С учетом представлений (27) и (28) имеем:

$$Q^\nu(\xi) \cdot t^d + o(t^d) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi_1 t^{\nu_1}, \dots, \xi_n t^{\nu_n}) \left[P_j^\nu(\xi) \cdot t^d + o(t^d) \right], \quad t \rightarrow +\infty.$$

Деля обе части последнего тождества на t^d и переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получим:

$$Q^\nu(\xi) = \sum_{j=1}^N \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} M_j(\xi_1 t^{\nu_1}, \dots, \xi_n t^{\nu_n}) \right] P_j^\nu(\xi). \quad (29)$$

Согласно лемме 1 Бомана, пределы в квадратных скобках в (29) существуют и соответственно равны:

1) некоторым константам $c_j \in \mathbb{C}$, если все компоненты вектора ν отличны от нуля (пункт (i));

2) некоторым мультипликаторам $\Lambda_j(\xi_{n-k+1}, \dots, \xi_n)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^k)$, если первые $n-k$ компонент вектора ν отличны от нуля, а последние k равны нулю (пункт (ii)).

Теорема полностью доказана. $\square$

Замечание 2. Отметим связь между теоремой 4 и теоремой 2 Бомана. Пусть $Q(D) = D^\beta$ и $\{D^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ – дифференциальные мономы, для которых справедлива априорная оценка (18). Пусть $\beta \in \Gamma$, где Γ – грань м. Н. $\mathcal{N}(\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}})$, не параллельная осям координат. Тогда согласно теореме 4 (i) имеет место тождество

$$\xi^\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{A} \cap \Gamma} c_j \xi^\alpha,$$

возможное лишь в случае, когда $\beta \in \mathcal{A}$, поскольку мономы ξ^β и $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ линейно независимы. Значит, при наличии оценки (18) точка β , отличная от точек $\alpha \in \mathcal{A}$, не может лежать на грани м. Н. системы мономов $\{\xi^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, не параллельной координатным плоскостям, что соответствует условию (B) теоремы 2.

6. Приложение к оценкам для дифференциальных операторов. В этом пункте применим результаты, полученные выше (теоремы 3 и 4), для описания пространства $\mathcal{L}(P_1, \dots, P_N)$. Мы ограничимся случаем одного оператора $P(D)$, являющегося тензорным произведением двух других, т. е. оператора вида (3). Ранее было отмечено, что интерес представляет случай, когда операторы-сомножители P_1 и P_2 эллиптичны, причем один из них однороден (не содержит младших членов), а другой – невырожден (его символ не обращается в нуль при вещественных значениях переменных). Рассмотрим один такой пример.

Теорема 5. Пусть $n = 3$, $P_1(D_1, D_2) = \Delta^l$, где $\Delta := D_1^2 + D_2^2$ – оператор Лапласа, $P_2(D_3) := D_3 + i$ и $P(D) := P_1(D) \otimes P_2(D)$. Тогда включение $Q \in \mathcal{L}(P)$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$Q(\xi) = \sum_{|\beta| < 2l, \beta_3=0} a_\beta \xi'^\beta + C_1 P_1(\xi') + C_2 \xi_3 P_1(\xi'), \quad \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (30)$$

где a_β, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. (i) *Необходимость.* Пусть $Q \in \mathcal{L}(P)$, где $Q(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_0} a_\alpha \xi^\alpha$ ($\mathcal{A}_0$ – конечное подмножество $\mathbb{Z}_+^3$). По теореме 3 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{N}(P)$, где $\mathcal{N}(P)$ – м. Н. полинома $P(\xi)$. В нашем случае $\mathcal{N}(P)$ является выпуклой оболочкой мультииндексов $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, $\{(\alpha', 0)\}_{|\alpha'|=2l}$ и $\{(\alpha', 1)\}_{|\alpha'|=2l}$, где $\alpha' := (\alpha_1, \alpha_2)$.

Так как каждая из двух последних совокупностей точек лежит на одной прямой, то в качестве образующих м. Н. $\mathcal{N}(P)$ можно оставить лишь концы соответствующих двух отрезков, а также начало координат. Таким образом, м. Н. полинома $P(\xi)$ представляет собой *четырехугольную пирамиду* $OABCD$ с вершинами $O(0, 0, 0)$, $A(2l, 0, 0)$, $B(0, 2l, 0)$, $C(0, 2l, 1)$ и $D(2l, 0, 1)$. Основанием этой пирамиды служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2l\sqrt{2}$ и $BC = 1$, а боковая грань OAB перпендикулярна плоскости основания $ABCD$ (см. рис. 4).

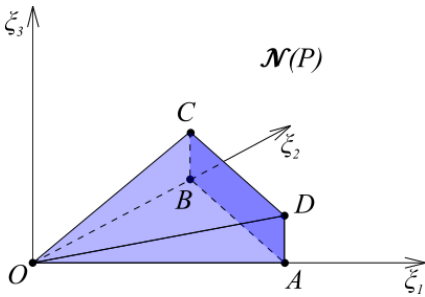


Рис. 4. Иллюстрация к теореме 5

Из геометрических соображений ясно, что внутри и на границе пирамиды $OABCD$ могут лежать лишь точки $\beta \in \mathbb{Z}_+^3$, для которых $\beta_1 + \beta_2 \leq 2l$ и $\beta_3 \leq 1$. Причем если $\beta \in \mathcal{N}(P)$ и $\beta_3 = 1$, то $\beta_1 + \beta_2 = 2l$. Другими словами, пирамида $OABCD$ не содержит внутренних целочисленных точек.

Пусть β принадлежит прямоугольнику $ABCD$, т. е. $\beta_1 + \beta_2 = 2l$. Рассмотрим ν -главные части $Q^\nu(\xi)$ и $P^\nu(\xi)$ полиномов $Q(\xi)$ и $P(\xi)$, соответствующие грани $ABCD$. Эта грань перпендикулярна плоскости $\xi_3 = 0$ и пересекает ее по прямой $\xi_1 + \xi_2 = 2l$, поэтому $\nu = (1, 1, 0)$. Тогда

$$Q^\nu(\xi) = \sum_{\beta_1+\beta_2=2l, \beta_3 \leq 1} a_\beta \xi^\beta =: Q_1(\xi') + \xi_3 Q_2(\xi'), \quad P^\nu(\xi) = P(\xi) = P_1(\xi')(\xi_3 + i).$$

Тогда по теореме 4 найдется $\Lambda(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ такой, что $Q^\nu(\xi) = \Lambda(\xi_3)P^\nu(\xi)$, т. е.

$$Q_1(\xi') + \xi_3 Q_2(\xi') = \Lambda(\xi_3)P_1(\xi')(\xi_3 + i), \quad \xi = (\xi', \xi_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (31)$$

Подставим $\xi_3 = 0$ в тождество (31), получим:

$$Q_1(\xi') = i\Lambda(0)P_1(\xi') =: CP_1(\xi'). \quad (32)$$

Подставим теперь $\xi_3 = 1$ в тождество (31). С учетом (32) получим

$$CP_1(\xi') + Q_2(\xi') = (1 + i)\Lambda(1)P_1(\xi') := C'P_1(\xi'),$$

откуда

$$Q^\nu(\xi) = Q_1(\xi') + \xi_3 Q_2(\xi') = CP_1(\xi') + \xi_3(C' - C)P_1(\xi') =: (C_1 + C_2\xi_3)P_1(\xi').$$

Таким образом, полином $Q(\xi)$ имеет вид

$$Q(\xi) = Q^\nu(\xi) + \sum_{\beta_1 + \beta_2 < 2l, \beta_3 = 0} a_\beta \xi'^{\beta},$$

т. е. вид (30).

(ii) *Достаточность.* Покажем, что оператор $Q(D)$ с символом (30) принадлежит $\mathcal{L}(P)$ для всех значений констант a_β , C_1 и C_2 .

В самом деле, оператор $P_1(D) = \Delta^l = (D_1^2 + D_2^2)^l$ эллиптический порядка $2l$ и, значит, $D^\beta \in \mathcal{L}(P_1)$ при $|\beta| < 2l$ (см. введение). Поэтому в силу теоремы 1 де Лю и Миркила найдутся $M(\cdot), N(\cdot) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ такие, что

$$\xi'^\beta = M(\xi')P_1(\xi') + N(\xi'), \quad |\beta| < 2l.$$

Кроме того, функции $M_1(\xi_3) = (\xi_3 + i)^{-1}$ и $M_2(\xi_3) := \xi_3(\xi_3 + i)^{-1}$ являются мультипликаторами в $L^\infty(\mathbb{R})$ (см. п. 2), поэтому

$$\xi'^\beta = M(\xi')M_1(\xi)P(\xi) + N(\xi'), \quad |\beta| < 2l$$

и

$$P_1(\xi') = M_1(\xi_3)P_1(\xi')(\xi_3 + i), \quad \xi_3 P_1(\xi') = M_2(\xi_3)P_1(\xi')(\xi_3 + i).$$

Для завершения доказательства осталось снова применить теорему 1. $\square$

1. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Мир, 1959. – 252 с.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
3. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
4. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – 11. – P. 40–49.

5. Маламуд М.М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Труды ММО. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
6. De Leeuw K., Mirkil H. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. – 1964. – **8**, no 1. – P. 112–124.
7. Boman J. Supremum norms for partial derivatives of functions of several real variables // Illinois J. Math. – 1972. – **16**, no 2. – P. 203–216.
8. Геворгян О.В. Оценки мономов через квазиполиномы и коэрцитивность квазидифференциальных операторов // Известия Академии наук Армянской ССР. – 1990. – **25**, № 2. – С. 182–192.
9. Лиманский Д.В., Маламуд М.М. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
10. Лиманский Д.В. Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов // Укр. матем. вісник. – 2011. – **8**, № 1. – С. 101–111.
11. Лиманский Д.В. Многоугольник Ньютона и априорные оценки для дифференциальных полиномов на плоскости // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 67–79.
12. Лиманский Д.В. О подчиненности одного дифференциального оператора тензорному произведению других в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ // Вестник ДонНУ. Сер. А. Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 41–49.
13. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

D. V. Limanskii

Generalizations of Boman's theorem and a priori estimates for systems of minimal differential operators.

In the paper generalizations of known Boman's theorem on estimates in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for differential monomials to the case of arbitrary differential operators are obtained. Besides this, application of these results for proving a priori estimates for a tensor product of minimal differential polynomials in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ is considered.

Keywords: differential polynomial, a priori estimate, Newton polyhedron.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»,
ГУ «Ин-т прикладной математики и механики», Донецк
4125aa@gmail.com

Получено 15.11.17

УДК 517.5, 519.213

©2017. А. Д. Манов

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В статье рассматриваются положительно определенные кусочно-линейные финитные функции, их свойства и связи с выпуклыми конусами неотрицательных тригонометрических и алгебраических многочленов. Также рассмотрены некоторые связанные с ними задачи.

Ключевые слова: положительно определенные функции, кусочно-линейные функции, теорема Бохнера–Хинчина, неотрицательные тригонометрические полиномы.

1. Введение. Пусть G – абелева группа. Комплекснозначная функция $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ называется положительно определенной на G ($f \in \Phi(G)$), если при любом $n \in \mathbb{N}$, и для любых элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset G$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j f(x_i - x_j) \geq 0.$$

В работе [1] авторами была рассмотрена и решена следующая задача Р.М. Тригуба.

Задача 1. Для заданных $\alpha \in (0, 1)$ и $h \in \mathbb{R}$ чётная функция $f_{\alpha,h}$ определяется следующим образом: $f_{\alpha,h}(x) = 0$ при $x \in [1, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, \alpha]$ и $[\alpha, 1]$ функция $f_{\alpha,h}$ является линейной и $f_{\alpha,h}(0) = 1$, $f_{\alpha,h}(\alpha) = h$, $f_{\alpha,h}(1) = 0$. Для каждого фиксированного $\alpha \in (0, 1)$ требуется найти множество всех $h \in \mathbb{R}$, для которых функция $f_{\alpha,h} \in \Phi(\mathbb{R})$.

Следующая теорема (см. [1]) даёт решение данной задачи.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{R}$. Тогда функция $f_{\alpha,h} \in \Phi(\mathbb{R}) \iff m(\alpha) \leq h \leq 1 - \alpha$, где $m(\alpha) = 0$, если $1/\alpha \notin \mathbb{N}$, и $m(\alpha) = -\alpha$, если $1/\alpha \in \mathbb{N}$.

Символом $S_1(n)$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим множество чётных, непрерывных, кусочно-линейных функций с узлами в точках $\{k/(n+1)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, равных нулю на промежутках $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$. Очевидно, что $S_1(n)$ является линейным пространством размерности $\dim S_1(n) = n + 1$. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h := (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, функцию $f_{n,h} \in S_1(n)$ определим следующим образом: $f_{n,h}(0) = 1$, $f_{n,h}(1) = 0$, $f_{n,h}(k/(n+1)) = h_k$, $k = 1, \dots, n$. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$, требуется найти множество $P_n := \{h \in \mathbb{R}^n : f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})\}$.

Пусть $g(x) := (1 - |x|)_+$. Из легко проверяемого интегрального представления $g(x) = 1/(2\pi) \int_{\mathbb{R}} (\sin^2(t/2)/(t/2)^2) e^{itx} dt$ и определения положительно определённых

функций следует, что $f_{n,0}(x) = g((n+1)x) \in \Phi(\mathbb{R})$. Таким образом, $0 \in P_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, значит, множества P_n не являются пустыми. Из теоремы 1 при $\alpha = 1/2$ вытекает, что $P_1 = [-1/2, 1/2]$. В общем случае, для произвольного $n \in \mathbb{N}$ описание множества P_n довольно трудная задача. С помощью следствия из теоремы Бохнера–Хинчина (следствие 2) и леммы 2 (эквивалентность утверждений 1° и 2°) задача 2 сводится к нахождению всех таких $h \in \mathbb{R}^n$, что

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k \cos(kx) \geq 0, \quad x \in [0, \pi]. \quad (1)$$

Хорошо известен критерий Рисса–Фейера (см. [2, Theorem B.1.4], [3, с. 92]) неотрицательности тригонометрических многочленов: *если $t(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$, $c_k \in \mathbb{C}$, то $t(x) \geq 0$ при $x \in [-\pi, \pi]$ тогда и только тогда, когда $t(x) = |q(x)|^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ для некоторого многочлена $q(x) = \sum_{k=0}^n d_k e^{ikx}$, $d_k \in \mathbb{C}$* . Пользуясь данным критерием,

можно показать, что $h \in P_n \iff 2h_k = \sum_{p=0}^{n-k} d_{k+p} d_p$, $k = 0, \dots, n$, $h_0 := 1$ для некоторого набора $\{d_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}$, т. е. задача сводится к вопросу о представимости h в виде свёртки финитных последовательностей.

При конкретном $h \in \mathbb{R}^n$ для проверки неравенства (1) удобно перейти к алгебраическим многочленам, сделав одну из замен $x(t) = 2 \arctg(\sqrt{t})$ или $x(t) = \arccos(t)$. Кроме того, можно воспользоваться различными теоремами для подсчёта и оценки числа действительных корней многочлена, например теоремы Штурма, Фурье–Бюдана, Сильвестра (см. [4]), и получить достаточные условия неотрицательности (1) и, как следствие, положительной определённости $f_{n,h}$.

С помощью замены $x(t) := 2 \arctg(\sqrt{t})$ в (1), мы получим следующее неравенство $M_{n,h}(t)/(1+t)^n \geq 0$ при $t \in [0, +\infty)$, где $M_{n,h}$ – некоторый алгебраический многочлен степени n с коэффициентами зависящими от h . В утверждении 2 найден явный вид $M_{n,h}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Также в разделе 3 показано, что P_n – выпуклый компакт и дано описание множества P_2 , а для $n \geq 3$ найдены подмножества P_n , т. е. достаточные условия принадлежности $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$.

В связи с задачей 2 стоит отметить следующую теорему Т.М. Bisgaard, Z. Sasvári [5, 1.7.12], А.С. Белов [6, Теорема 1] (см. также [7, Theorem F]).

Теорема 2. Пусть $d > 0$, $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел и f – кусочно-линейная функция с узлами в $\{(kd, c_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Тогда $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \Phi(\mathbb{Z})$. Необходимость в данной теореме очевидна, так как если H является подгруппой G , то $\Phi(G) \subset \Phi(H)$. При условии четности и финитности f данная теорема совпадает с утверждением 1° $\iff$ 3° леммы 2. Данное утверждение в [6] выводится при помощи критерия Рисса–Фейера.

Отметим также работы Е. Lukacs и О. Szász [8, 9, 10], в которых рассматриваются рациональные положительно определенные функции и связанные с ними неотрицательные тригонометрические полиномы специального вида.

С задачей 2 тесно связана следующая задача.

Задача 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Определим разностный оператор $G_{n,h}$ на функциях $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$G_{n,h}[f](t) := \left(I + \sum_{k=1}^n h_k \delta_k \right) f(t), \quad \delta_k f(t) := f(t+k) + f(t-k),$$

где I – тождественный оператор. Пусть K – некоторое подмножество комплекснозначных функций на прямой. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ требуется найти множество всех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $G_{n,h}(\Phi(\mathbb{R}) \cap K) \subset \Phi(\mathbb{R}) \cap K$.

В следствии 7 будет показано, что в случае $K = C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ решения задач 2 и 3 совпадают. Дополнительную информацию об операторах вида $G_{n,h}$ можно найти в [11].

В разделе 4 рассматривается задача Т. Gneiting и приводится её решение.

2. Вспомогательные факты и утверждения. Отметим следующие свойства функций из $\Phi(G)$. Пусть $f, f_i \in \Phi(G)$. Тогда:

- 1) $|f(x)| \leq f(0)$, $\overline{f(-x)} = f(x)$, $x \in G$;
- 2) $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $\bar{f}$, $\operatorname{Re} f$, $f_1 f_2 \in \Phi(G)$, где $\lambda_i \geq 0$;
- 3) если для всех $x \in G$ существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$, то $g \in \Phi(G)$;
- 4) если дополнительно G – вещественное линейное пространство, то для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(\lambda x) \in \Phi(G)$.

Доказательство свойств 1)–4) можно найти, например, в [2]. Пусть G – ЛКА (локально компактная абелева) группа. Обозначим $\hat{G}$ двойственную к группе G группу, т. е. группу непрерывных гомоморфизмов $\chi: G \rightarrow \mathbb{T}$, $\langle x, \chi \rangle := \chi(x)$. Для суммируемой (относительно меры Хаара) функции $f \in L_1(G)$ преобразование Фурье с точностью до положительной константы определяется следующим образом:

$$\hat{f}(\chi) := \int_G f(x) \overline{\langle x, \chi \rangle} dx, \quad \chi \in \hat{G},$$

где dx – мера Хаара. Если наделить $\hat{G}$ топологией равномерной сходимости на компактах, то группа $\hat{G}$ сама превращается в ЛКА группу. В 1940 году А. Вейль, Д.А. Райков и А.Я. Повзнер независимо обобщили теорему Бохнера–Хинчина на случай ЛКА групп.

Теорема 3. Пусть G – ЛКА группа. Тогда функция $f \in C(G) \cap \Phi(G)$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\hat{G}$ такая, что

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \langle x, \chi \rangle d\mu(\chi), \quad x \in G.$$

Доказательство можно найти, например, в [2, 12, 13]. Как следствие, получаем следующий критерий положительной определенности для непрерывных интегрируемых функций (см. например [2, Theorem 1.9.6]).

Следствие 1. Если $f \in C(G) \cap L_1(G)$, то $f \in \Phi(G) \iff \widehat{f}(\chi) \geq 0, \chi \in \widehat{G}$.

В случае групп $\mathbb{R}^n, \mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ получаем следующие утверждения:

Следствие 2. Если $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L_1(\mathbb{R}^n)$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff \widehat{f}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}^n$, где

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Следствие 3. Если $f \in C(\mathbb{T})$, то $f \in \Phi(\mathbb{T}) \iff \widehat{f}(k) \geq 0, k \in \mathbb{Z}$, где

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следствие 4. Если $f \in L_1(\mathbb{Z})$, то $f \in \Phi(\mathbb{Z}) \iff \widehat{f}(t) \geq 0, t \in \mathbb{T}$, где

$$\widehat{f}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Доказательства последних трёх следствий без обращения к абстрактной теореме Бохнера можно найти в [5]. Также нам потребуется следующее неравенство Боаса–Каца [14].

Теорема 4. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\text{supp } f \subset [-A, A]$, где $A > 0$. Тогда

$$|f(x)| \leq f(0) \cos \frac{\pi}{\lceil A/x \rceil + 1}, \quad |x| \leq A, \quad (2)$$

где $\lceil a \rceil$ – наименьшее целое число, для которого $a \leq \lceil a \rceil$. Причем, неравенство точное, т. е. для любого x из $[-A, A]$ найдется функция $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\text{supp } f \subset [-A, A]$, на которой указанное неравенство обращается в равенство.

Отметим, что в работе [14] содержатся неточности. В частности, в неравенстве (2) (формулы (1.4), (3.4) в [14]) вместо $\lceil a \rceil$ стоит $[a]$ – целая часть числа a . Исправления неточностей содержится в пятом параграфе статьи Боаса [15].

3. Свойства множества P_n и его связь с задачей 3. Достаточные условия принадлежности P_n .

Утверждение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда P_n – выпуклый компакт.

Доказательство. Так как $P_n \subset \mathbb{R}^n$, то требуется показать, что P_n – выпуклое, ограниченное, замкнутое множество. Далее, запись $h_i(k)$ будет означать i -ую координату некоторой точки $h(k) \in \mathbb{R}^n$.

1) Пусть $h(1), h(2) \in P_n$ и $h := \lambda h(1) + (1 - \lambda)h(2)$, $\lambda \in [0, 1]$. Несложно проверить, что $f_{n,h} = \lambda f_{n,h(1)} + (1 - \lambda)f_{n,h(2)}$. Таким образом, $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$ и, значит, $h \in P_n$. Выпуклость доказана.

2) Пусть $h \in P_n$. Из неравенства $|f_{n,h}(x)| \leq f(0) = 1, x \in \mathbb{R}$ следует, что $|f_{n,h}(k/(n+1))| = |h_k| \leq 1, k = 1 \dots n$. Таким образом, $\|h\|_\infty := \max_{k=1,n} |h_k| \leq 1$.

Ограниченность доказана.

3) Пусть $\{h(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset P_n$ и $h(k) \rightarrow h$ поточечно. Отсюда следует, что

$$f_{n,h(k)}(i/(n+1)) \rightarrow f_{n,h}(i/(n+1)), \quad k \rightarrow \infty, \quad i = 1 \dots n.$$

Сходимость в точках $x = 0$ и $x = 1$ очевидна. Так как $f_{n,h(k)}$ – кусочно-линейная, четная функция, то из сходимости в точках $\{i/(n+1)\}_{i=0}^{n+1}$ вытекает, что $f_{n,h(k)}(x) \rightarrow f_{n,h}(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$ и, значит, $h \in P_n$. Заключительность доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1° $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$;

2° $t_n(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k \cos(kx) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \pi)$;

3° $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \Phi(\mathbb{Z})$, где $h_0 := 1, h_k := 0$, при $k > n$ и $h_k = h_{-k}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Так как $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ финитна, то эквивалентность 2° $\iff$ 3° вытекает из следствия 4.

Докажем 1° $\iff$ 2°. Напомним, что $g(x) := (1 - |x|)_+$ и $\widehat{g}(t) = 4 \sin^2(t/2)/t^2$. Несложно проверить, что $f_{n,h}$ представима в виде:

$$f_{n,h}(x) = \sum_{|k| \leq n} h_k g((n+1)x - k), \quad x \in \mathbb{R},$$

где h_k те же, что и в 3°. Таким образом,

$$\begin{aligned} \widehat{f_{n,h}}(t) &= \sum_{|k| \leq n} \frac{h_k}{n+1} e^{-it \frac{k}{n+1}} \widehat{g}\left(\frac{t}{n+1}\right) = \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k \cos\left(\frac{kt}{n+1}\right) \right) \widehat{g}\left(\frac{t}{n+1}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Очевидно, что неравенство $\widehat{f_{n,h}}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$ эквивалентно следующему неравенству $(n+1)\widehat{f_{n,h}}((n+1)t) =: t_n(t)\widehat{g}(t) \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Далее, так как t_n – чётная, 2π -периодическая функция, а $\widehat{g}$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, то из 2° и следствия 2 следует, что $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$. Утверждение 2° $\Rightarrow$ 1° доказано. Пусть теперь $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда из следствия 2 вытекает, что $t_n(t)\widehat{g}(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $t_n(t) \geq 0$ для всех t , возможно, за исключением нулей $\widehat{g}$. Но, так как t_n непрерывна, а $\widehat{g}$ имеет только изолированные нули, то $t_n(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, а, значит, и для $t \in [0, \pi)$. Утверждение 1° $\Rightarrow$ 2° доказано. Лемма доказана. $\square$

Следствие 5. Для любого $n \in \mathbb{N}$ множество P_n содержит окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h = (h_1, \dots, h_n) \in P_n$. Тогда

1° $(-h_1, h_2, \dots, (-1)^k h_k, \dots, (-1)^n h_n) \in P_n$;

$$\mathcal{D}^{\circ} (0, h_2, 0, \dots, ((-1)^k + 1)h_k/2, \dots, ((-1)^n + 1)h_n/2) \in P_n.$$

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h \in P_n$. Тогда из леммы 2 следует неравенство $1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k \cos(kx) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Подставим в него $x = u + \pi$. Получим, что $1 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k h_k \cos(ku) \geq 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Применяя ещё раз лемму 2 получим утверждение 1°. Утверждение 2° следует из выпуклости P_n и утверждения 1°. $\square$

Следствие 7. Пусть $K = C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Тогда множество P_n является решением задачи 3.

Доказательство. Надо воспользоваться следствием 2 и легко проверяемым соотношением $\widehat{\delta_k f}(t) = 2 \cos(kt) \widehat{f}(t)$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, а также леммой 2. $\square$

Утверждение 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:

$$1^{\circ} f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R});$$

$$2^{\circ} C_{n,h}(x) := 1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k T_k(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in [-1, 1], \text{ где } T_p(x) := \cos(p \arccos x),$$

$x \in [-1, 1]$, $p \in \mathbb{Z}_+$ – многочлены Чебышева;

$$3^{\circ} M_{n,h}(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \geq 0 \text{ для всех } x \in [0, +\infty), \text{ где } a_k = \xi_{k0n} h_0 + 2 \sum_{p=1}^n \xi_{kpn} h_p,$$

$h_0 := 1$, $\xi_{kpn} := \sum_{i=0}^k C_n^{k-i} \beta_i(p)$, где $\beta_0(t) \equiv 1$ и $\beta_i(t) := \sum_{s=1}^i b_{is} t^{2s}$ при $1 \leq i \leq n$ многочлены степени $2i$ коэффициенты которых определяются следующим образом:

$$b_{is} := (-1)^s 2^{2s} \sum_{l \in A_{is}} \frac{1}{l!} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{(-1)^j}{2j+1} \right)^{l_{j+1}},$$

где $l \in \mathbb{Z}_+^i$ $l! := l_1! \cdots l_i!$ и множество

$$A_{is} := \{l \in \mathbb{Z}_+^i : \sum_{j=0}^{i-1} (2j+1)l_{j+1} = 2i, |l| := \sum_{j=1}^i l_j = 2s\}.$$

Кроме того, многочлены $C_{n,h}$ и $M_{n,h}$ связаны следующим соотношением:

$$M_{n,h}(x) = (1+x)^n C_{n,h} \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \quad x \geq 0.$$

Доказательство. Утверждение $1^{\circ} \iff 2^{\circ}$ вытекает из леммы 2 и соотношения $t_n(\arccos x) = C_{n,h}(x)$, $x \in [-1, 1]$. Докажем $1^{\circ} \iff 3^{\circ}$. Из леммы 2 следует, что

$$f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff t_n(x) = \sum_{j=0}^n \tilde{h}_j \cos(jx) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \pi),$$

где $\tilde{h}_0 := h_0 = 1$, $\tilde{h}_j := 2h_j$, $j = 1, \dots, n$. Сделаем замену $u = \operatorname{tg}(x/2)$. Тогда $\cos(x) = (1-u^2)/(1+u^2)$ и из соотношения, которое несложно получить из формулы Эйлера,

$$\cos(jx) = \sum_{i=0}^{[j/2]} (-1)^i C_j^{2i} \cos^{j-2i} x \sin^{2i} x, \quad j = 0, \dots, n.$$

вытекает, что $t_n(x(u))$ имеет вид:

$$t_n(x(u)) := \frac{\sum_{k=0}^n a_k u^{2k}}{(1+u^2)^n}, \quad u \in [0, +\infty).$$

Таким образом, $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff M_{n,h}(u^2) := \sum_{k=0}^n a_k u^{2k} \geq 0$ для всех $u \in [0, +\infty)$.

Найдём коэффициенты a_k . Очевидно, что

$$\begin{aligned} a_k(2k)! &= \frac{d^{2k}}{du^{2k}} \left((1+u^2)^n t_n(x(u)) \right) \Big|_{u=0}. \\ \frac{d^{2k}}{du^{2k}} \left((1+u^2)^n t_n(x(u)) \right) &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \frac{d^{2k-i}}{du^{2k-i}} (1+u^2)^n \frac{d^i}{du^i} t_n(x(u)) = \\ &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i \frac{d^{2k-i}}{du^{2k-i}} (1+u^2)^n \cdot \sum_{p=0}^n \tilde{h}_p \frac{d^i}{du^i} \cos(px(u)). \end{aligned}$$

Несложно проверить, что

$$\frac{d^{2k-i}}{du^{2k-i}} (1+u^2)^n \Big|_{u=0} = \begin{cases} C_n^{k-i/2} (2k-i)!, & i - \text{чётное}, \\ 0, & i - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{d^{2k}}{du^{2k}} \left((1+u^2)^n t_n(x(u)) \right) \Big|_{u=0} = \sum_{p=0}^n \left(\sum_{i=0}^k C_{2k}^{2i} C_n^{k-i} (2k-2i)! \frac{d^{2i}}{du^{2i}} \cos(px(u)) \Big|_{u=0} \right) \tilde{h}_p.$$

Осталось показать, что

$$\beta_i(p)(2i)! = \frac{d^{2i}}{du^{2i}} \cos(2p \operatorname{arctg}(u)) \Big|_{u=0}.$$

Для этого воспользуемся формулой Фаа ди Бруно [16].

$$\frac{d^s}{du^s} \psi(\varphi(u)) = \sum_l \frac{s!}{l!} \psi^{(|l|)}(\varphi(u)) \prod_{j=1}^s \left(\frac{\varphi^{(j)}(u)}{j!} \right)^{l_j},$$

Некоторые задачи, связанные с положительно определенными кусочно-линейными функциями

где $l := (l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{Z}_+^s$, $|l| := l_1 + \dots + l_s$, $l! := l_1! \dots l_s!$ и суммирование происходит по всем мультииндексам l таким, что $\sum_{j=1}^s j \cdot l_j = s$. В качестве $\varphi(u)$ возьмем $\arctg(u)$.

Так как $\frac{d^s}{dx^s} \cos(2px) = (2p)^s \cos(2px + s\pi/2)$,

$$\frac{d^{2i}}{du^{2i}} \cos(2p \arctg(u)) = \sum_l \frac{(2i)!(2p)^{|l|} \cos(2p \arctg(u) + |l|\pi/2)}{l!} \prod_{j=1}^{2i} \left(\frac{\arctg^{(j)}(u)}{j!} \right)^{l_j}.$$

Значение $\arctg^{(j)}(0)/j!$ соответствует j -му коэффициенту в разложении $\arctg(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)$ и, значит, чётные координаты мультииндекса l можно считать равными нулю. Таким образом,

$$\left. \frac{d^{2i}}{du^{2i}} \cos(2p \arctg(u)) \right|_{u=0} = (2i)! \sum_l \frac{(2p)^{|l|} \cos(\frac{|l|\pi}{2})}{l!} \prod_{j=0}^{i-1} \left(\frac{(-1)^j}{2j+1} \right)^{l_{2j+1}},$$

где суммирование ведется по всем мультииндексам $l \in \mathbb{Z}_+^{2i}$ таким, что

$$\sum_{j=0}^{i-1} (2j+1)l_{2j+1} = 2i \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^i l_{2j} = 0.$$

Суммирование можно производить по $l \in \mathbb{Z}_+^{2i}$, для которых $|l|$ – чётное число, так как в противном случае слагаемые равны нулю. Остаётся только сгруппировать сумму по четным степеням p и перейти к мультииндексам из $\mathbb{Z}_+^i$.

Связь между многочленами $C_{n,h}$ и $M_{n,h}$ вытекает из соотношения $\arctg x = (1/2) \arccos(1 - x^2)/(1 + x^2)$, $x \geq 0$, которое несложно проверить, используя интегральное определение $\arctg x$ и $\arccos x$. $\square$

ПРИМЕР 1. Выпишем $M_{2,h}$ и $M_{3,h}$. Для этого нам потребуются многочлены $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Приведем их. $\beta_0(t) \equiv 1$, $\beta_1(t) = -2t^2$, $\beta_2(t) = (4/3)t^2 + (2/3)t^4$ и $\beta_3(t) = -1/45(46t^2 + 40t^4 + 4t^6)$. Получим

$$M_{2,h}(x) = (1 - 2h_1 + 2h_2)x^2 + (2 - 12h_2)x + 1 + 2h_1 + 2h_2,$$

$$M_{3,h}(x) = (1 - 2h_1 + 2h_2 - 2h_3)x^3 + (3 - 2h_1 - 10h_2 + 30h_3)x^2 + \\ + (3 + 2h_1 - 10h_2 - 30h_3)x + 1 + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3.$$

Из утверждения 2 можно получить различные достаточные условия положительной определённости $f_{n,h}$. Например, если все коэффициенты $a_k(h)$, $k = 0, \dots, n$ многочлена $M_{n,h}$ неотрицательны, то $M_{n,h}(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и $f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$. В силу линейной зависимости $a_k(h)$ от h , решения $h \in \mathbb{R}^n$ ($h_0 = 1$) системы неравенств $a_k(h) \geq 0$, $k = 0, \dots, n$ образуют выпуклый многогранник содержащийся в P_n .

Для получения других достаточных условий можно воспользоваться теоремой Фурье–Бюдана [4, с. 38].

Теорема 5. Пусть $N(x)$ – число перемен знака в последовательности $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$, где f – многочлен степени n . Тогда число корней многочлена f (с учётом их кратности), заключённых между a и b , где $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$.

Таким образом, если $C_{n,h}(\pm 1) > 0$ и $C_{n,h}^{(q)}(\pm 1) \geq 0$ при $q = 1, \dots, n$, то $h \in P_n$. Значения $C_{n,h}^{(q)}(\pm 1)$ при $q = 0, \dots, n$ можно выписать в явном виде. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $T_k(x)$ – многочлен Чебышева степени k . Тогда

$$T_k^{(q)}(1) = \prod_{i=0}^{q-1} \frac{k^2 - i^2}{1 + 2i}, \quad T_k^{(q)}(-1) = (-1)^{k+q} \prod_{i=0}^{q-1} \frac{k^2 - i^2}{1 + 2i}, \quad q = 0, \dots, k.$$

При $q = 0$ под $\prod_{i=0}^{q-1}$ подразумевается единица.

Доказательство. Пусть $T_k(x)$ – многочлен Чебышева степени k . Найдём вначале $T_k^{(q)}(1)$. Далее будет использована связь $T_k(x)$ и гипергеометрической функции

$${}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1,$$

где $(a)_n := a(a+1) \dots (a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$. Известно следующее выражение $T_k(x)$ через ${}_2F_1(a, b; c; z)$ (см. [17, с. 375]): $T_k(1-2x) = {}_2F_1(-k, k; 1/2; z)$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{d^q}{dx^q} (T_k(1-2x))|_{x=0} = (-2)^q \prod_{i=0}^{q-1} \frac{k^2 - i^2}{1 + 2i}.$$

Далее заметим, что $\frac{d^q}{dx^q} (T_k(1-2x)) = (-2)^q T_k^{(q)}(1-2x)$. Таким образом, выраже-

ние для $T_k^{(q)}(1)$ доказано. Формула для $T_k^{(q)}(-1)$ получается из $T_k^{(q)}(1)$, если заметить, что чётность $T_k(x)$ совпадает с чётностью k . $\square$

Отсюда, получаем следующие достаточные условия.

Утверждение 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Если выполнены следующие неравенства

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k > 0, \quad 1 + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k h_k > 0,$$

$$\sum_{k=q}^n h_k \prod_{i=0}^{q-1} \frac{k^2 - i^2}{1 + 2i} \geq 0, \quad \sum_{k=q}^n h_k (-1)^{k+q} \prod_{i=0}^{q-1} \frac{k^2 - i^2}{1 + 2i} \geq 0, \quad q = 1, \dots, n,$$

то $h \in P_n$.

Теорема 6. $f_{2,h} \in \Phi(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

$$1. |h_1| \leq 2/3 \text{ и } -1/2 + |h_1| \leq h_2 \leq (1 + \sqrt{1 - 2h_1^2})/4;$$

$$2. 2/3 \leq |h_1| \leq \sqrt{2}/2 \text{ и } (1 - \sqrt{1 - 2h_1^2})/4 \leq h_2 \leq ((1 + \sqrt{1 - 2h_1^2})/4).$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая очевидная лемма.

Лемма 4. Пусть $q(x) := ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$. Тогда $q(x) \geq 0$ при $x \in [0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:

$$1^\circ a > 0, D \leq 0;$$

$$2^\circ a \geq 0, b \geq 0, q(0) = c \geq 0.$$

Докажем теперь теорему 6.

Доказательство. Как уже известно, $M_{2,h}(x) = (1 - 2h_1 + 2h_2)x^2 + (2 - 12h_2)x + 1 + 2h_1 + 2h_2$. Далее, воспользуемся леммой 4. Из условия 1° получаем, что

$$1/2 - h_1 + h_2 > 0, \text{ и } h_1^2 + 8h_2^2 - 4h_2 \leq 0.$$

Полученное множество соответствует замыканию внутренности эллипса с границей $h_1^2 + 8h_2^2 - 4h_2 = 0$, без точки $(2/3, 1/6)$. Из условия 2° получаем, что

$$h_2 \leq 1/6, 1/2 - h_1 + h_2 \geq 0, 1/2 + h_1 + h_2 \geq 0.$$

Данное множество является треугольником ограниченным прямыми: $h_2 = 1/6$, $h_2 = h_1 - 1/2$, $h_2 = -h_1 - 1/2$. Несложно проверить, что прямая $h_2 = h_1 - 1/2$ касается эллипса в точке $h_1 = 2/3$, $h_2 = 1/6$, а прямая $h_2 = -h_1 - 1/2$ в точке $h_1 = -2/3$, $h_2 = 1/6$. $\square$

Из полного описания множества P_2 (теорема 6) вытекает следующее необходимое условие положительной определенности чётных финитных функций.

Следствие 8. Пусть $f \in \Phi(\mathbb{R})$, $f(0) = 1$, $f(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $f(x) = 0$ при $|x| \geq A$, где $A > 0$. Тогда $(f(1/(3A)), f(2/(3A))) \in P_2$.

Доказательство. Пусть f удовлетворяет условиям следствия 8. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(x) := f(x/A)$. Очевидно, что $\tilde{f} \in \Phi(\mathbb{R}) \subset \Phi((1/3)\mathbb{Z})$, и, значит, последовательность $\{\tilde{f}(k/3)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ положительно определена. Из леммы 2 следует, что $f_{2,h} \in \Phi(\mathbb{R})$ при $h = (\tilde{f}(1/3), \tilde{f}(2/3))$. Следствие доказано. $\square$

Теорема 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}^n$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1° Если $\|h\|_1 := \sum_{k=1}^n |h_k| \leq 1/2$, то $f_{h,n} \in \Phi(\mathbb{R})$. Если выполнено одно из следующих условий:

$$a) h_k \leq 0, \text{ для всех } k = 1 \dots n;$$

$$b) (-1)^{k+1}h_k \geq 0, \text{ для всех } k = 1 \dots n,$$

то условие $\|h\|_1 \leq 1/2$ является также и необходимым условием принадлежности $f_{h,n} \in \Phi(\mathbb{R})$.

2° Если $h \in (1/2)\text{conv}\{e_1, \dots, e_n, 2p_n\}$, то $f_{h,n} \in \Phi(\mathbb{R})$, где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$ и $(n+1)p_n := (n, \dots, (n-k+1), \dots, 1)$.

Доказательство. Докажем первую часть утверждения 1°. Так как P_n – выпуклое множество, а точки $\{\pm e_j/2\}_{j=1}^n$ являются вершинами гипероктаэдра, то достаточно показать, что $\{\pm e_j/2\}_{j=1}^n \subset P_n$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{R}^n$, определим $h^k \in \mathbb{R}^n$ следующим образом $h_i^k := \delta_{ik} h_i$. Применяя лемму 2 получаем, что

$$f_{n,h^k} \in \Phi(\mathbb{R}^n) \iff 1 + 2h_k \cos(kx) \geq 0, \quad x \in [0, \pi).$$

А это справедливо тогда и только тогда, когда $-1/2 \leq h_k \leq 1/2$. При $h_k = \pm(1/2)$ получаем, что $h^k = \pm e_k/2$. Так как $k = 1, \dots, n$, то $\{\pm e_j/2\}_{j=1}^n \subset P_n$. Отсюда также вытекает, что P_n пересекает оси по симметричным отрезкам.

Докажем 1° а). Пусть $f_{h,n} \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда из леммы 2 следует, что

$$1 + 2 \sum_{k=1}^n h_k \cos(kx) \geq 0, \quad \forall x \in [0, \pi).$$

Подставляя в неравенство $x = 0$, получим $-\sum_{k=1}^n h_k \leq 1/2$. Но, так как по предположению $h_k \leq 0$, для всех $k = 1 \dots n$, то $-\sum_{k=1}^n h_k = \sum_{k=1}^n |h_k|$ и, следовательно, $\|h\|_1 \leq 1/2$. Для доказательства 1° б) достаточно взять $x = \pi$ и воспользоваться предположением.

Для доказательства 2° достаточно показать, что $p_n \in P_n$. Функция $(1 - |x|)_+ \in \Phi(\mathbb{R})$. С другой стороны, $(1 - |x|)_+ = f_{n,p_n}(x)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $p_n \in P_n$. $\square$

4. Задача Gneiting и связанные с ней положительно определённые функции. Известны примеры характеристических функций (непрерывных положительно определённых функций, равных единице в нуле), равных отрицательной константе на некотором отрезке. Например, Ramachandran [18] построил следующую функцию обладающую указанным свойством.

ПРИМЕР 2. Пусть $a \in (1/3, 1)$ и g – периодическое продолжение функции $(1 - |t|)$ с отрезка $[-2, 2]$ ($g \in \Phi(\mathbb{R})$).

$$\rho_a(t) = \frac{1}{1+a} g(at) + \frac{a}{1+a} g(t), \quad a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right).$$

Для $t \in [2, b]$, где $b := \min\{4, 2/a\}$ $\rho_a(t) = (1-3a)/(1+a)$. Выбирая соответствующие a , можно получить различные отрицательные значения из $(-1, 0)$.

Известен также пример Gneiting [19, p. 362].

ПРИМЕР 3. Пусть $c \in (-1, 0)$ и γ_c — непрерывная периодическая функция с периодом $2(c-1)/c$, определённая на периоде следующим образом

$$\gamma_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1-c}{2}|t|, & |t| < 2, \\ c, & 2 \leq |t| \leq (c-1)/c. \end{cases}$$

В примерах 2 и 3 указанные характеристические функции являются почти-периодическими и, значит, являются преобразованиями Фурье дискретных мер. В конце работы [19] Gneiting поставил вопрос о существовании характеристической функции φ , которая является преобразованием Фурье абсолютно непрерывной меры и $\varphi \equiv \text{const} < 0$ на множестве положительной меры Лебега. В [1] авторы привели пример характеристической функции, обладающей указанным свойством.

ПРИМЕР 4. Пусть $1/\alpha, 1/\beta \in \mathbb{N}$, $0 < \beta < \alpha \leq 1/2$ и $\lambda \in (\alpha/(1+\alpha), 1)$. Определим функцию

$$\varphi_{\alpha,\beta,\lambda}(t) := p_\lambda f_{\alpha,-\alpha}(\lambda t) + (1-p_\lambda) f_{\beta,-\beta}(t), \text{ где } p_\lambda = \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha)(1-\beta)\lambda + \alpha\beta},$$

где $f_{\alpha,-\alpha}$, $f_{\beta,-\beta}$ функции из задачи 1. На отрезке $[\beta, \min\{\alpha/\lambda, 1\}]$, $\varphi_{\alpha,\beta,\lambda}(t) = (p_\lambda - \beta)/(1-\beta) < 0$.

Функция $\varphi_{\alpha,\beta,\lambda}(t)$ является выпуклой комбинацией функций $f_{\alpha,-\alpha}(\lambda t)$, $f_{\beta,-\beta}(t)$, поэтому $\varphi_{\alpha,\beta,\lambda}(t) > -1/2$ для всех $t \in [0, 1/\lambda]$ и, как следствие, $(p_\lambda - \beta)/(1-\beta) > -1/2$. Следующая теорема показывает, что существуют характеристические функции, которые финитны и равны отрицательной константе c на некотором промежутке, причём константа c может быть сколь угодно близка к -1 .

Теорема 8. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда существует $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geq A$, где $A > 0$ и $\varphi(t) = C$ на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset [0, A]$, причём $C \in (-1, -1+\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Из точности неравенства Боаса–Каца (теорема 4) следует, что существует (построение см. в [14]) $\psi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ $\psi(0) = 1$, $\psi(t) = 0$ при $|t| \geq 1$ и $\psi(1/n) = -\cos(\pi/(n+1))$. Так как $\Phi(\mathbb{R}) \subset \Phi(1/(2n)\mathbb{Z})$, то из леммы 2 следует, что $(\psi(1/(2n)), \dots, \psi(k/(2n)), \dots, \psi((2n-1)/(2n))) \in P_{2n-1}$. Из следствия 6 следует, что

$$\tilde{h} := (0, \psi(2/(2n)), 0, \dots, ((-1)^{(2n-1)} + 1)\psi((2n-1)/(2n))/2) \in P_{2n-1}.$$

Пусть $\tilde{\psi}(t) := f_{2n-1, \tilde{h}}(t)$ и $c(n) := \cos(\pi/(n+1))$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_{n,\lambda}(t) := p_\lambda \tilde{\psi}(\lambda t) + (1-p_\lambda) \tilde{\psi}(t), \quad p_\lambda \in (0, 1), \quad \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Очевидно, что при указанных p_λ функция $\varphi_{n,\lambda} \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ и $\varphi_{n,\lambda}$ имеет ограниченный носитель. Условие $\lambda \in (1/2, 1)$ обеспечивает выполнение следующих неравенств

$$\frac{1}{2\lambda n} < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{\lambda n} > \frac{1}{n}. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию $\varphi_{n,\lambda}$ на отрезке $[1/n, \beta]$, где $\beta = \min\{1/(\lambda n), 3/(2n)\}$. Учитывая (3), получим

$$\varphi_{n,\lambda}(t) = p_\lambda(-c(n)2\lambda nt + c(n)) + (1 - p_\lambda)(c(n)2nt - 3c(n)), \quad t \in [1/n, \beta].$$

Функция $\varphi_{n,\lambda}$ на $t \in [1/n, \beta]$ имеет вид $At + C$, где

$$A = c(n)2n(1 - p_\lambda(\lambda + 1)); \quad C = c(n)(4p_\lambda - 3).$$

Очевидно, что $\varphi_{n,\lambda}(t) = C < 0$ на $[1/n, \beta]$ тогда и только тогда, когда $A = 0$ и $C < 0$. Отсюда получаем условия: $p_\lambda = 1/(1 + \lambda)$ и $\lambda > 1/3$. Учитывая ограничения на λ , получим:

$$\varphi_{n,\lambda}(t) = C < 0, \quad t \in [1/n, \beta] \iff p_\lambda = 1/(1 + \lambda), \quad \lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Для заданного $\varepsilon \in (0, 1)$ всегда можно подобрать достаточно большее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $c(n) > 1 - \varepsilon$, так как $c(n) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. После чего можно подобрать достаточно близкое к единице λ такое, что $C = c(n)(4p_\lambda - 3) < -1 + \varepsilon$, так как $4p_\lambda - 3 \rightarrow -1$ при $\lambda \rightarrow 1 - 0$. При полученных n и λ , обозначим $\varphi := \varphi_{n,\lambda}$ и $\alpha := 1/n$. Полученная функция φ удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана. $\square$

Приведем ещё один пример финитной характеристической функции являющейся отрицательной константой на некотором отрезке.

ПРИМЕР 5. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $h := \underbrace{(-1/(2n), \dots, -1/(2n))}_n$. Тогда $\|h\|_1 = 1/2$ и

$f_{n,h} \in \Phi(\mathbb{R})$. При этом $f_{n,h}(t) = -1/(2n)$ при $t \in [1/(n+1), n/(n+1)]$.

В [19] Gneiting поставил следующую задачу о множествах уровня.

Задача 4. Пусть $c \in [-1, 1]$, обозначим $\mathfrak{B}_c$ класс всех подмножеств $B \subset \mathbb{R}$ для которых найдётся характеристическая функция φ такая, что $\varphi(t) = c \iff t \in B$. Для каждого $c \in [-1, 1]$ требуется найти описание $\mathfrak{B}_c$.

Там же Gneiting привёл частичное решение поставленной задачи, опираясь на результаты Z. Sasvári [20] и А.И. Ильинского [21]. При $c \in [0, 1]$, $\mathfrak{B}_c = \mathfrak{B}_0$ и состоит из замкнутых, симметричных множеств без нуля. $\mathfrak{B}_1$ состоит из множеств вида $b\mathbb{Z}$, где $b \geq 0$, а $\mathfrak{B}_{-1}$ состоит из множеств $b(2\mathbb{Z} + 1)$, где $b > 0$. Для $c \in (-1, 0)$ задача не решена. Несложно показать (см. [19]), что при $-1 \leq c \leq c' \leq 0$ выполняется $\mathfrak{B}_c \subset \mathfrak{B}_{c'}$.

Покажем, что $\mathfrak{B}_0 \not\subset \mathfrak{B}_c$ при $c \in (-1, 0)$. Для этого нам потребуется следующее утверждение, доказанное В.П. Заставным (см. [22, Theorem 1], [23, Теорема 9]).

Утверждение 4. Если $f \in \Phi(\mathbb{R})$ и $|\Re f| + \Re f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\Re f \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $B := (-\infty, -A] \cup [A, +\infty)$, где $A > 0$. Тогда $B \in \mathfrak{B}_0$. Предположим, что $B \in \mathfrak{B}_c$ при некотором $c \in (-1, 0)$. Тогда найдётся характеристическая функция $\varphi(t)$ такая, что $\varphi(t) = c$ при $|t| \geq A$. Причем $|\Re \varphi(t)| + \Re \varphi(t) = 0$ при $|t| \geq A$ и, значит, $|\Re \varphi| + \Re \varphi \in L(\mathbb{R})$. Из утверждения следует, что $\Re \varphi \in L(\mathbb{R})$. Но это противоречит тому, что $\varphi(t) = c \neq 0$ при $|t| \geq A$.

5. Заключение. В заключении отметим, что остаётся ряд нерешённых вопросов. В частности, ещё не известно описание класса $\mathfrak{B}_c$ при $c \in (-1, 0)$. Кроме того, в связи с теоремой 8, возникает следующая экстремальная задача: пусть $c \in [-1, 1]$ и функция $l(c)$ определяется следующим образом:

$$l(0) := 2, \quad l(c) := \sup_{\varphi} m(\{x : \varphi(x) = c\}), \quad 0 < |c| \leq 1,$$

где m – мера Лебега и точная верхняя грань берётся по всем $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таким, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\text{supp } \varphi \subset [-1, 1]$ и $\varphi(0) = 1$. Требуется исследовать данную функцию.

1. Manov A., Zastavnyi V. Positive definiteness of piecewise-linear function // Expo. Math. – 2017. – **35**. – P. 357–361.
2. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. – Berlin, Boston: De Gruyter, 2013. – 366 p.
3. Поля Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 435с.
4. Прасолов В. Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
5. Bisgaard T.M., Sasvári Z. Characteristic functions and moment sequences: Positive definiteness in probability. – New York: Nova Sci. Publishers, 2000. – 144 p.
6. Белов А.С. О положительно определённых ломаных функциях и их применениях // Тр. МИАН. – 2013. – **280**. – С. 11–40.
7. Goldberg R.R. Restrictions of Fourier Transforms and Extension of Fourier Sequences // Journal of Approximation Theory. – 1970. – **3**. – P. 149–155.
8. Lukacs E., Szász O. Certain Fourier transforms of distributions // Journal Canadien de Mathématiques. – 1951. – **3**. – P. 140–144.
9. Lukacs E., Szász O. Some Nonnegative Trigonometric Polynomials Connected With a Problem in Probability // Journal of Research of the National Bureau of Standards. – 1952. – **48**. – P. 139–146.
10. Lukacs E., Szász O. Nonnegative Trigonometric Polynomials and Certain Rational Characteristic Functions // Journal of Research of the National Bureau of Standards. – 1954. – **52**. – P. 153–160.
11. Заставный В.П. Интерполяция положительно определённых функций // Международная научная конференция «Теория приближения и её приложения», посвященная 75-летию профессора В.П. Моторного. – Тезисы докладов. – 8-11 окт. 2015г., г. Днепропетровск – С. 37.
12. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2.: Структура и анализ компактных групп. Анализ на локально компактных абелевых группах. – Москва : Мир, 1975. – 900 с.
13. Rudin W. Fourier Analysis on Groups. – New York: Interscience, 1962. – 286 p.
14. Boas R.P., Jr., Kac M. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. –1945. – **12**, no 1. – P. 189–206.
15. Boas R.P.Jr. More inequalities for Fourier transforms // Duke Math. J. –1948. – **15**, no 1. – P. 105–109.
16. Faa di Bruno F. Note sur une nouvelle formule du calcul différentiel // Quart. J. Math. –1855. – **27**, no 1. – P. 359–360.
17. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
18. Ramachandran B. Characteristic functions taking constant values on intervals of the real line // Statistics & Probability Letters. – 1996. – **28**. – P. 269–270.
19. Gneiting T. Curiosities of Characteristic Functions // Expositiones Mathematicae. – 2001. – **19**. – P. 359–363.
20. Sasvári Z. Über die Nullstellenmenge von charakteristischen Funktionen // Mathematische Nachrichten. – 1985. – **121**. – P. 33–40.

21. Ильинский А.И. О нулях и аргументе характеристической функции // Теория вероятн. и ее примен. – 1975. – **20**, по 2. – С. 421–427.
22. Zastavnyi V.P. Extension of a function from exterior of an interval to a positive-definite function on the axis and an approximative characteristic of the class $W_M^{r,\beta}$ // Ukrainian Mathematical Journal. – 2003. – **55**, по 7. – Р. 1189–1897.
23. Заставный В.П., Тризуб Р.М. Положительно определённые сплайны // Деп. в Укр. НИИН-ТИ, по 593-Ук.87.

A. D. Manov

Some problems related to positive definite piecewise-linear functions.

In this paper, we consider positive definite piecewise-linear compactly supported functions, their properties and relation to convex cones of nonnegative trigonometric and algebraic polynomials. We also consider some problems related to such functions.

Keywords: *positive definite functions, piecewise-linear functions, Bochner–Khinchin theorem, nonnegative trigonometric polynomials.*

Донецкий национальный ун-т
manov.ad@ro.ru

Получено 22.05.17

УДК 517

©2017. А. Л. Павлов

О ЯДРЕ ОПЕРАТОРА УМНОЖЕНИЯ НА ФУНКЦИЮ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Доказана бесконечность ядра оператора умножения на бесконечно дифференцируемую функцию, имеющую конечное число нулей конечной кратности в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $n > 1$. Введены пространства обобщенных функций сколь угодно большого порядка сингулярности, не содержащие нетривиальных элементов ядра оператора умножения на функцию, имеющую нули.

Ключевые слова: обобщенная функция, оператор умножения на функцию, ядро оператора.

1. Введение. Одним из наиболее простых и вместе с тем очень важных операторов в функциональном анализе и его приложениях является оператор умножения на функцию. Такие операторы широко используются для конструирования различных математических объектов: функциональных пространств и задач с ними связанных, псевдодифференциальных операторов и др. Рассмотрение различных классов функций и соответствующих им операторов в функциональных пространствах представляет широкий класс задач анализа (описание мультипликаторов, проблема деления, регуляризация и др.) [1]. Успешное решение многих проблем зависит от удачного выбора функционального пространства или его построения. Для этих целей часто используется оператор умножения на функцию.

В настоящей работе рассматривается оператор умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$, заданную в области $\Omega \subset R^n$ в пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$ и его подпространствах. Целью работы является изучение размерности ядра этого оператора в случае, когда функция имеет конечное число нулей конечной кратности, а также описание подпространств, содержащих обобщенные функции сколь угодно большого порядка сингулярности, но не содержащих нетривиальных элементов ядра оператора умножения на функцию, имеющую нули.

Если функция $a(\sigma)$ имеет бесконечно много нулей или нули бесконечной кратности, то очевидно, что ядро оператора умножения на такую функцию в $\mathcal{D}'(\Omega)$ бесконечномерно. В случае, когда нулей конечное число и они конечной кратности, ответ зависит от размерности пространства, в котором задана функция.

В работе доказано, что в случае $n = 1$ размерность ядра конечна, а в случае $n > 1$ оно бесконечномерно. Доказательство основано на применении аналога подготовительной теоремы Вейерштрасса для бесконечно дифференцируемых функций [2, с. 241].

Пользуясь регуляризацией функции расстояния до замкнутого множества [3] построены пространства обобщенных функций, имеющие порядок сингулярности не выше заданного, которые не содержат нетривиальных обобщенных функций, со-

средоточенных на заданном замкнутом множестве. Умножение на функцию, нули которой содержатся в этом множестве, в этих пространствах не имеет нетривиальных элементов ядра соответствующего оператора умножения. Такие пространства представляют интерес для построения классов корректности краевых задач в полупространстве [4, 5].

2. О размерности ядра оператора умножения на функцию в пространствах обобщенных функций. Рассмотрим пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\Omega)$ над основным пространством $\mathcal{D}(\Omega)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в области $\Omega \subset R^n$ ($\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$).

Произвольная бесконечно дифференцируемая функция $a(\sigma)$ определяет линейный непрерывный оператор умножения A в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$: $(Af, \varphi) = (f, a(\sigma)\varphi)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Обозначим через $\text{Ker } A$ ядро оператора A :

$$\text{Ker } A = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : a(\sigma)u = 0\}.$$

Существование нетривиального ядра у такого оператора связано с существованием нулей функции $a(\sigma)$ и обобщенных функций в $\mathcal{D}'(\Omega)$, сосредоточенных на нулях функции $a(\sigma)$:

$$\text{Ker } A \subset \mathcal{D}'(\Omega, N) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \text{supp } f \subset N = \{\sigma \in \Omega : a(\sigma) = 0\}\}.$$

Очевидно, что имеют место включения

$$\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^2 \subset \dots \subset \text{Ker } A^m \subset \dots \subset \mathcal{D}'(\Omega, N).$$

Представляет интерес описание подпространств $\mathcal{D}'(\Omega, N)$, которые содержатся в объединении множеств $\text{Ker } A^m$.

Теорема 2.1. *Множество обобщенных функций конечного порядка, сосредоточенных на множестве N является подмножеством множества $\bigcup_m \text{Ker } A^m$.*

Доказательство. Пусть обобщенная функция $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ имеет конечный порядок. Тогда ее можно представить в следующем виде [2]

$$f = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L_{\text{loc}}^1(\Omega). \quad (2.1)$$

Если $f \in \mathcal{D}'(\Omega, N)$, то для любой функции $\mu \in C^\infty(\Omega)$, равной единице в окрестности множества N , выполняется равенство

$$(f, \varphi) = (f, \mu\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.2)$$

Покажем, что при достаточно больших $m \in N$ $f \in \text{Ker } A^m$, т. е. справедливо равенство

$$(f, a^m(\sigma)\mu\varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.3)$$

Обозначим через $d(\sigma, N)$ расстояние от точки σ до замкнутого множества N :

$$d(\sigma, N) = \inf_{n \in N} |\sigma - n|.$$

Параметризуем левую часть равенства (2.3), используя функции

$$\mu_\varepsilon(\sigma) = \chi_\varepsilon * \psi_{\varepsilon/2}(\sigma), \quad \varepsilon > 0,$$

где χ_ε – характеристическая функция множества

$$N^{\varepsilon/2} = \{\sigma \in R^n : d(\sigma, N) \leq \varepsilon/2\},$$

$$\psi_\varepsilon(\sigma) = \varepsilon^{-n} \psi(\sigma/\varepsilon), \quad \psi(\sigma) \in C_0^\infty(R^n), \quad \psi(\sigma) \geq 0, \quad \int \psi(\sigma) d\sigma = 1,$$

$$\text{supp } \psi \subset V(0, 1/4) = \{\sigma \in R^n : |\sigma| \leq 1/4\}.$$

Нетрудно показать [2, с. 39], что $\mu_\varepsilon(\sigma) = 1$ в окрестности множества N и для любого $\alpha \in Z_+^n$ выполняется неравенство

$$|\partial^2 \mu_\varepsilon(\sigma)| \leq c_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}, \quad \sigma \in \Omega. \quad (2.4)$$

Рассмотрим для данной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ функцию

$$q_m(\varepsilon) = \left(f, a^m(\sigma) \mu_\varepsilon \varphi \right), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Из равенства (2.2) следует, что функция $g_m(\varepsilon)$ не зависит от ε . Чтобы показать, что она равна нулю при большом m , не зависящим от φ , достаточно получить оценку

$$|q_m(\varepsilon)| \leq c_m \varepsilon^\lambda, \quad \lambda > 0, \quad m > m_0, \quad (2.5)$$

где $c_m > 0$ – числа, зависящие от $a(\sigma)$ и φ .

Используя представление (2.1) обобщенной функции f и формулу Лейбница функцию $q_m(\varepsilon)$ можно представить в виде линейной комбинации интегралов вида

$$q_{m,\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon) = \int_{\Omega} g_\alpha(\sigma) \partial^\beta a^m(\sigma) \partial^{\alpha-\beta-\gamma} \mu_\varepsilon(\sigma) \partial^\gamma \varphi(\sigma) d\sigma,$$

где $\beta \leq \alpha$, $\gamma \leq \alpha - \beta$, $|\alpha| \leq k$.

Пользуясь тем, что $\text{supp } \varphi \Subset \Omega$ и $g_\alpha(\sigma) \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, для каждого такого интеграла имеем оценку

$$|q_{m,\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon)| \leq c_{m,\alpha,\beta,\gamma} \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \partial^\beta a^m(\sigma) \right| \cdot \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \partial^{\alpha-\beta-\gamma} \mu_\varepsilon(\sigma) \right|, \quad (2.6)$$

где $c_{m,\alpha,\beta,\gamma}$ – числа, зависящие от g_α и φ .

Оценивание правой части неравенства (2.6) по параметру ε сводится к оцениванию первого множителя и использованию неравенства (2.4).

Для каждого $\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi$ существует такое $\eta(\sigma) \in N$, что $|\sigma - \eta(\sigma)| \leq \varepsilon$. Следовательно справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} |a^k(\sigma)| &= \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} |a(\sigma) - a(\eta(\sigma))|^k \leq \\ &\leq \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \sum_{i=1}^n \partial_i a(\sigma + \theta(\sigma - \eta(\sigma))(\sigma_i - \eta_i)) \right|^k \leq \\ &\leq c_1 \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i a(\sigma)|^2 \right)^{k/2} \cdot \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} |\sigma - \eta(\sigma)|^k \leq c_2 \varepsilon^k. \end{aligned}$$

Используя приведенную оценку можно оценить рассматриваемый множитель

$$\sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \partial^\beta a^m(\sigma) \right| \leq c_3 \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp } \varphi} \left| \sum_{k=m-|\beta|}^{m-1} a^k(\sigma) f_m(\sigma) \right| \leq \sum_{k=m-|\beta|}^{m-1} c_k \varepsilon^k \leq c_\beta \varepsilon^{m-|\beta|},$$

где $f_i(\sigma)$ – произведение производных функций $a(\sigma)$ разного порядка.

Из полученного неравенства и неравенства (2.4) следуют неравенства

$$|q_{m,\alpha,\beta,\gamma}(\varepsilon)| \leq \tilde{c}_{m,\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon^{m-|\beta|} \cdot \varepsilon^{-|\alpha|+|\beta|+|\gamma|} \leq \hat{c}_{m,\alpha,\beta,\gamma} \varepsilon^{m-|\alpha|}.$$

Так как $|\alpha| \leq k$, то при $m > k$ справедливо неравенство (2.5).

Одной из важнейших характеристик ядра линейного оператора является его размерность. Если множество нулей функции N бесконечно или имеется нуль бесконечной кратности, то ядро оператора умножения на эту функцию в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$ бесконечномерно, так как в нем существует бесконечно много линейно независимых элементов ядра, а именно дельта-функции, сосредоточенные в точках $\sigma \in N$ или производные дельта-функции любого порядка. Если же множество N конечно и нули функции имеют конечную кратность, то в одномерном случае ($n = 1$) ядро оператора умножения A конечномерно. В многомерном случае оно бесконечномерно.

Теорема 2.2. *Если множество нулей бесконечно дифференцируемой функции $a(\sigma)$ конечно и нули имеют конечную кратность, то $\dim \text{Ker } A < \infty$ для $n = 1$ и $\dim \text{Ker } A = \infty$ для $n > 1$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда функция $a(\sigma)$ имеет один нуль конечной кратности. Для простоты будем предполагать, что это точка $\sigma = 0$.

Если $n = 1$, то пользуясь формулой Тейлора функцию $a(\sigma)$ можно представить в окрестности точки $\sigma = 0$ в таком виде $a(\sigma) = \sigma^k f(\sigma)$, где k – кратность нуля, $f(\sigma) \neq 0$.

Пусть $u \in \text{Ker } A$. Тогда $\text{supp } u = \{0\}$ и имеет место представление $u = \sum_{i=0}^p c_i \delta^{(i)}$, где c_i – некоторые числа, δ – дельта-функция, сосредоточенная в точке $\sigma = 0$ [2, с. 64].

Пользуясь формулой Лейбница нетрудно показать справедливость равенств

$$\sigma^k \delta^{(i)} = \begin{cases} (-1)^k \frac{i!}{(i-k)!} \delta^{(i-k)}, & \text{если } k \leq i, \\ 0, & \text{если } k > i. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из равенства $a(\sigma)u = 0$ и приведенных представлений функции $a(\sigma)$ и обобщенной функции u имеем равенство

$$f(\sigma) \left(\sum_{i=0}^p \tilde{c}_i (-1)^k \frac{i!}{(i-k)!} \delta^{(i-k)} \right) = 0,$$

где $\tilde{c}_i = c_i$, если $i \geq k$ и $\tilde{c}_i = 0$, если $i < k$.

Так как $f(\sigma) \neq 0$ и обобщенные функции $\delta^{(j)}$ линейно независимы, то из полученного равенства следует, что $p < k$ и $\dim \text{Ker } A = k$.

Пусть теперь $n > 1$, $a(0) = 0$, $a(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$ и существует такое $p \in N$, что выполняются соотношения

$$\partial^\alpha a(0) = 0, \quad |\alpha| < p \quad \text{и} \quad \exists \alpha : |\alpha| = p, \quad \partial^\alpha a(0) \neq 0.$$

Из аналога подготовительной теоремы Вейерштрасса для дифференцируемых функций [2, с. 241, теорема 7.55] следует, что функцию $a(\sigma)$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 0$, может быть после линейной замены переменных, можно представить в виде

$$a(\sigma) = (\sigma_n^p + a_{p-1}(\sigma') \sigma_n^{p-1} + \dots + a_0(\sigma')) f(\sigma), \quad (2.8)$$

где $\sigma = (\sigma', \sigma_n)$, $f(\sigma)$, $a_i(\sigma')$, $i = 0, \dots, p-1$ – бесконечно дифференцируемые функции и справедливы соотношения

$$a_0(0) = a_1(0) = \dots = a_{p-1}(0) = 0, \quad f(\sigma) \neq 0.$$

Из равенства $a(\sigma)u = 0$ и условия на функцию $a(\sigma)$ следует, что $\text{supp } u = \{0\}$ и, следовательно, имеет место равенство

$$u = \sum_{|\beta|=0}^r u_\beta \delta^{(\beta)} = \sum_{k=0}^r v_k (\partial') \delta_{\sigma'} \otimes \delta_n^k, \quad (2.9)$$

где $\delta_{\sigma'}$ – дельта-функция в пространстве R^{n-1} , δ_n – дельта-функция в R , $v_k(\sigma')$ – многочлен.

Воспользовавшись представлениями (2.8) и (2.9) для функции $a(\sigma)$ и обобщенной функции u , получим равенство

$$\sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^r a_i(\sigma') v_k(\partial') \delta_{\sigma'} \otimes \sigma_n^i \delta_n^{(k)} = 0, \quad (2.10)$$

где $a_p(\sigma') = 1$. Так как справедливы равенства (2.7), то равенство (2.10) принимает вид

$$\sum_{j=0}^r Q_j(\sigma', \partial') \delta_{\sigma'} \otimes \delta_n^{(j)} = 0, \quad (2.11)$$

где $Q_j(\sigma', \partial') = \sum_{i=0}^{i+j \leq r} (-1)^i \frac{(i+j)!}{j!} \tilde{a}_i(\sigma') v_{i+j}(\partial')$, $\tilde{a}_i(\sigma') = \begin{cases} a_i(\sigma'), & i \leq p \\ 0, & i > p. \end{cases}$

В силу линейной независимости обобщенных функций $\delta_n^{(k)}$, $k = 0, \dots, r$, а соответственно, и тензорных произведений $\delta_{\sigma'}^{(\rho)} \otimes \delta_n^{(j)}$ равенство (2.11) равносильно системе равенств

$$Q_j(\sigma', \partial') \delta_{\sigma'} = 0, \quad j = 0, \dots, r. \quad (2.12)$$

Следовательно, всякое решение уравнения $a(\sigma)u = 0$ имеет вид (2.9) и определяющие его операторы $v_k(\partial')$ удовлетворяют системе равенств (2.12).

Будем искать решение уравнения $a(\sigma)u = 0$ вида (2.9) при условии $r > p$ пользуясь системой (2.12). Для этого запишем ее, пользуясь описанием ее левых частей:

$$\begin{aligned} j = r & \quad a_0(\sigma') v_r(\partial') \delta_{\sigma'} = 0, \\ j = r - 1 & \quad \left(\frac{r!}{(r-1)!} a_1(\sigma') v_r(\partial') + a_0(\sigma') v_{r-1}(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ j = r - 2 & \quad \left(\frac{r!}{(r-2)!} a_2(\sigma') v_r(\partial') + \frac{(r-1)!}{(r-2)!} a_1(\sigma') v_{r-1}(\partial') + a_0(\sigma') v_{r-2}(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ j = r - p + 1 & \quad \left(\frac{r!}{(r-p+1)!} a_{p-1}(\sigma') v_r(\partial') + \frac{(r-1)!}{(r-p+1)!} a_{p-2}(\sigma') v_{r-1}(\partial') + \right. \\ & \quad \left. + \dots + a_0(\sigma') v_{r-p+1}(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ j = r - p & \quad \left(\frac{r!}{(r-p)!} v_r(\partial') + \frac{(r-1)!}{(r-p)!} a_{p-1}(\sigma') v_{r-1}(\partial') + \dots + a_0(\sigma') v_{r-p}(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ j = r - p - 1 & \quad \left(\frac{(r-1)!}{(r-p-1)!} v_{r-1}(\partial') + \dots + a_0(\sigma') v_{r-p-1}(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ & \quad \dots \dots \dots \\ j = 1 & \quad \left(\dots \dots \dots \frac{(p+1)!}{1!} v_{p+1}(\partial') + \dots + a_0(\sigma') v_1(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0, \\ j = 0 & \quad \left(\dots \dots \dots p' v_p(\partial') + \dots + a_0(\sigma') v_0(\partial') \right) \delta_{\sigma'} = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пусть $r = kp$. Построим решение полученной системы. Для этого исключим неизвестные операторы $v_p(\partial'), \dots, v_r(\partial')$.

Из последнего уравнения следует, что

$$v_p(\partial') = -\frac{1}{p!} \left((p-1)! a_{p-1}(\sigma') v_{p-1}(\partial') + \dots + a_p(\sigma') v_0(\partial') \right).$$

Следовательно, оператор $v_p(\partial')$ является линейной комбинацией операторов $v_{p-1}(\partial'), \dots, v_0(\partial')$ с коэффициентами из кольца

$$R_k^\infty = \{a \in C^\infty : a(0) = 0, \quad \partial^\alpha a(0) = 0, \quad |\alpha| \leq k\}$$

при $k = 0$.

Из предпоследнего уравнения системы (2.13) следует, что оператор $v_{p+1}(\partial')$ также является линейной комбинацией операторов $v_{p-1}(\partial'), \dots, v_0(\partial')$ с коэффициентами из кольца R_0^∞ . Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что это верно для всех операторов $v_{p+2}(\partial'), \dots, v_{2p-1}(\partial')$.

Из системы (2.13) следует, что

$$v_{2p}(\partial') = -\frac{1}{(2p)!} \left((2p-1)! a_{p-1}(\sigma') v_{2p-1}(\partial') + \dots + a_0(\sigma') v_p(\partial') \right).$$

Следовательно оператор $v_{2p}(\partial')$ является линейной комбинацией операторов $v_{p-1}(\partial'), \dots, v_0(\partial')$ с коэффициентами из кольца R_1^∞ . Это верно для всех операторов $v_{2p+1}(\partial'), \dots, v_{3p-1}(\partial')$.

Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что операторы $v_r(\partial') = v_{kp}(\partial'), \dots, v_{(k-1)p+1}(\partial')$ являются линейными комбинациями операторов $v_{p-1}(\partial'), \dots, v_0(\partial')$ с коэффициентами из кольца R_{k-1}^∞ . Подставив их в первые p уравнений системы (2.13), получим систему уравнений вида

$$(b_{ij}(\sigma')) \begin{pmatrix} v_{p-1}(\partial') \\ \vdots \\ v_0(\partial') \end{pmatrix} = 0, \quad (2.14)$$

где $b_{ij}(\sigma') \in R_k^\infty$, $i, j = 1, \dots, p$.

Так как $b_{ij}(\sigma') v(\partial') = 0$, если $\deg v(\sigma') < k$, то системе (2.14) удовлетворяет любой набор операторов $v_{p-1}(\partial'), \dots, v_0(\partial')$, удовлетворяющих условию $\deg v_i(\sigma') < k$, $i = 0, \dots, p-1$.

Всякое решение системы (2.14) порождает решение системы (2.13), а следовательно, и решение уравнения $a(\sigma)u = 0$. Так как k можно выбрать сколь угодно большим, то из приведенных рассуждений следует существование бесконечного числа линейно независимых решений этого уравнения. Следовательно, ядро оператора умножения на бесконечно дифференцируемую функцию в пространстве $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $n > 1$ бесконечномерно даже в самом простом случае – функция имеет один нуль кратности 1.

Обозначим через $\mathcal{D}'^k(\Omega)$ множество обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$ порядок которых не превышает k .

Следствие. Если выполнены условия теоремы 2.2, то $\dim(\text{Ker } A \cap \mathcal{D}'^k(\Omega)) < +\infty$.

Справедливость этого утверждения следует из доказательства теоремы 2.2.

3. Пространства единственности оператора умножения. Оператор умножения на бесконечно дифференцируемую функцию в широко используемых пространствах обобщенных функций имеет нетривиальное ядро, если данная функция имеет нули. Один из путей избавления от нетривиальности ядра состоит в рассмотрении обобщенных функций, являющихся регулярными в окрестности нулей функции, если они не имеют внутренних точек. Другой подход состоит в конструировании пространств из данных, в которых оператор умножения имеет тривиальное ядро.

Пространство обобщенных функций называется пространством единственности для оператора умножения на функцию $a(\sigma)$, если в этом пространстве уравнение $a(\sigma)f = 0$ имеет только тривиальное решение.

Построение пространств единственности для оператора умножения на функцию представляет интерес для описания классов корректности краевых задач в полупространстве в шкале пространств H_l^s :

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s = \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s \left| \mathfrak{F}_y \left((1 + |y|^2)^{l/2} f \right) \right|^2 d\sigma \right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

где $\mathfrak{F}_y g$ – преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [5].

Если $a(\sigma)$ является многочленом, то пространство $H_{-\infty}^s = \bigcup_l H_l^s$ является пространством единственности для оператора умножения на многочлен $a(\sigma)$, если $s > -\frac{\text{codim } N}{2}$, где N – множество вещественных нулей $a(\sigma)$ [4].

Пространства единственности для оператора умножения на функцию $a(\sigma)$ зависят от кратности ее нулей. Универсальными пространствами единственности для оператора умножения на функцию $a(\sigma)$ являются пространства обобщенных функций, которые не содержат нетривиальных функций, сосредоточенных на множестве нулей N функции $a(\sigma)$. Построение таких пространств основано на использовании весовых функций, связанных с функцией расстояния от точки до множества N .

Рассмотрим регуляризованное расстояние $\Delta(\sigma, N)$ от точки σ до множества N , т. е. функцию принадлежащую пространству $C^\infty(R^n \setminus N)$ и удовлетворяющую условиям

$$c_1 d(\sigma, N) \leq \Delta(\sigma, N) \leq c_2 d(\sigma, N), \quad \sigma \in R^n \setminus N, \quad (3.1)$$

$$|\partial^\alpha \Delta(\sigma, N)| \leq B_\alpha d(\sigma, N)^{1-|\alpha|}, \quad \sigma \in R^n \setminus N, \quad (3.2)$$

где c_1, c_2, B_α – некоторые положительные числа не зависящие от σ и N . Доказательство существования такой функции содержится в [3].

Лемма 3.1. Функция $\rho_k(\sigma) = \Delta^{k+1}(\sigma, N)$, $\sigma \in R^n$, принадлежит пространству $C^k(R^n)$.

Доказательство. По построению $\rho_k(\sigma) \in C^\infty(R^n \setminus N)$. Докажем справедливость неравенств.

$$|\partial^\alpha \rho_k(\sigma)| < c_\alpha d^{k+1-|\alpha|}(\sigma, N), \quad \sigma \in R^n \setminus N, \quad (3.3)$$

где c_α – некоторые положительные числа.

Если $|\alpha| = 1$, то, пользуясь неравенствами (3.1) и (3.2), получим неравенства

$$|\partial_i \rho_k(\sigma)| = |(k+1)\Delta^k(\sigma, N)| |\partial_i \Delta(\sigma, N)| \leq c_i d^k(\sigma, N), \quad \sigma \in R^n \setminus N, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, при $|\alpha| = 1$ неравенства (3.3) справедливы.

Предположим, что они верны для всех мультииндексов α , $|\alpha| = m$ и $\alpha' = \alpha + \gamma_i$, $|\gamma_i| = 1$. Используя формулу Лейбница, неравенства (3.1) и (3.2), получим при $\sigma \in R^n \setminus N$ оценку

$$\begin{aligned} |\partial_{\alpha'} \rho_k(\sigma)| &= \left| \partial^\alpha \left((k+1)\Delta^k(\sigma, N) \partial_i \Delta(\sigma, N) \right) \right| = \\ &= (k+1) \left| \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \partial^\beta \Delta^k(\sigma, N) \partial^{\alpha'-\beta} \Delta(\sigma, N) \right| \leq \\ &\leq c'_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} d^{k-|\beta|}(\sigma, N) d^{1-|\alpha|-1+|\beta|}(\sigma, N) \leq c_\alpha d^{k-|\alpha|}(\sigma, N) = c_\alpha d^{k+1-|\alpha'|}(\sigma, N). \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства (3.3) справедливы для всех мультииндексов α .

Из неравенства (3.3) следует, что в точках $\sigma \in N$ производные функции $\rho(\sigma)$ до порядка k существуют, равны нулю и непрерывны. Следовательно, $\rho_k(\sigma) \in C^k(R^n)$.

Лемма 3.2. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, то для любого $\alpha \in Z_+^n$, $|\alpha| \leq k$ справедливы неравенства

$$\sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp} \varphi} |\partial^\alpha (\rho_k(\sigma) \varphi(\sigma))| \leq c_\alpha \left(\sum_{\beta \leq \alpha} \sup |\partial^\beta \varphi(\sigma)| \right) \varepsilon^{k+1-|\alpha|}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (3.4)$$

где c_α – некоторые положительные числа.

Доказательство. Используя формулу Лейбница и неравенства (3.3), получим неравенства

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp} \varphi} |\partial^\alpha (\rho_k(\sigma) \varphi(\sigma))| &\leq c'_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp} \varphi} (\partial^\beta \rho_k(\sigma) |\partial^{\alpha-\beta} \varphi(\sigma)|) \leq \\ &\leq c''_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp} \varphi} d^{k+1-|\beta|}(\sigma, N) \sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cap \text{supp} \varphi} |\partial^{\alpha-\beta} \varphi(\sigma)|. \end{aligned}$$

Справедливость неравенств (3.4) следует из полученного неравенства и оценки

$$\sup_{\sigma \in N^\varepsilon \cup \text{supp} \varphi} d^{k+1-|\beta|}(\sigma, N) \leq \varepsilon^{k+1-|\beta|}.$$

Пространство $\mathcal{D}'^k(\Omega)$ является множеством обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$, для которых справедливы неравенства

$$|(f, \varphi)| \leq c_k \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi(\sigma)|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ supp } \varphi \subset K \Subset \Omega, \quad (3.5)$$

где константа c_k зависит от компакта K , а целое число k одно и то же для всех K . Элементы множества $\mathcal{D}'^k(\Omega)$ можно единственным образом продолжить до линейных непрерывных функционалов на пространстве $C_0^k(\Omega)$ ([2, теорема 2.1.6, с. 53]). Из леммы 3.2 следует, что оператор умножения на функцию $\rho_k(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства $C_0^k(\Omega)$ в себя. Следовательно этот оператор определен и непрерывен в пространстве $\mathcal{D}'^k(\Omega)$.

Теорема 3.1. *Если $g \in \mathcal{D}'^k(\Omega)$ и $\text{supp } g \subset N$, то справедливо равенство $\rho_k(\sigma)g = 0$.*

Доказательство теоремы 3.1 совпадает по существу с доказательством теоремы 2.1, так как принадлежность обобщенной функции g пространству $\mathcal{D}'^k(\Omega)$ означает, что ее можно представить в виде $g = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ [2]. Это представление лежало в основе доказательства теоремы 2.1. В нем также использовались производные до порядка k функции, на которую умножались обобщенные функции. Из леммы 3.1 следует, что функция $\rho_k(\sigma)$ соответствует этим требованиям.

Обозначим оператор умножения на функцию $\rho_k(\sigma)$ в пространстве $\mathcal{D}'^k(\Omega)$ через R_N^k , а множество обобщенных функций из пространства $\mathcal{D}'^k(\Omega)$, сосредоточенных на множестве $N \subset \Omega$ через $\mathcal{D}'^k(\Omega, N)$.

Из теоремы 3.1 следует равенство

$$\text{Ker } R_N^k = \mathcal{D}'^k(\Omega, N). \quad (3.6)$$

Включение $\text{Ker } R_N^k \subset \mathcal{D}'^k(\Omega, N)$ очевидно: если $\rho_k(\sigma)g = 0$, то $\text{supp } g \subset N$.

Обозначим образ оператора умножения на функцию $\rho_k(\sigma)$ через $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$.

Лемма 3.3. *Множество $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ – подпространство $\mathcal{D}'^k(\Omega)$, не содержащее нетривиальных обобщенных функций, сосредоточенных на множестве N .*

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из равенства (3.6).

Теорема 3.2. *Пространство $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ является пространством единственности для любого оператора умножения на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$, нули которой принадлежат множеству N .*

Доказательство. Пространство $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ является подпространством $\mathcal{D}'(\Omega)$ и умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ определено и непрерывно на нем. Из неравенства (3.5) следует, что соответствующий оператор отображает $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ в $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ и справедливо равенство

$$a(\sigma)\rho_k(\sigma)f = \rho_k(\sigma)a(\sigma)f, \quad f \in \mathcal{D}'^k(\Omega).$$

Если $f \in R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ и $af = 0$, то $f = \rho_k(\sigma)g$, $g \in \mathcal{D}'^k(\Omega)$ и $\text{supp } g \subset N$. Из равенства 3.6 следует, что $g \in \text{Ker } R_N^k$, т. е. $f = \rho_k(\sigma)g = 0$. Следовательно, в пространстве $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ нет нетривиальных решений уравнения $a(\sigma)f = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При построении пространств $R_N^k \mathcal{D}'^k(\Omega)$ достаточно было использовать функцию $\rho_k(\sigma) = \Delta^{k+\varepsilon}(\sigma, N)$, $\varepsilon > 0$.

При изучении дифференциальных уравнений и задач с ними связанных широко используется гильбертова шкала пространств H_l^s .

Лемма 3.4. Если N — компактное подмножество R^n или полу-алгебраическое, то для функции $\rho_k(\sigma)$ справедливы неравенства

$$|\partial^\alpha \rho_k(\sigma)| \leq c_\alpha (1 + |\sigma|)^{\mu_\alpha}, \quad \sigma \in R^n \setminus N, \quad |\alpha| \leq k, \quad (3.7)$$

где $c_\alpha > 0$, μ_α — некоторые числа.

Доказательство неравенства (3.7) следует из неравенства (3.3) и оценки

$$d(\sigma, N) \leq c(1 + |\sigma|)^\mu. \quad (3.8)$$

Для компактного множества N она очевидна и $\mu = 1$, а доказательство ее справедливости для полу-алгебраического множества содержится в [7].

Теорема 3.3. Если N — компактное или полу-алгебраическое множество, то оператор R_N^k является непрерывным отображением $H_{-\infty}^{-k}$ в себя.

Доказательство. Пусть $R \in H_{-\infty}^{-k}$. Тогда существует такое l , что $f \in H_l^{-k}$. Из определения нормы в пространствах H_l^s следует, что $H_l^{-k} \subset \mathcal{D}'^k(R^n)$. Следовательно, $\rho_k(\sigma)f \in \mathcal{D}'^k(R^n)$. Докажем, что оно принадлежит некоторому пространству $H_{l'}^{-k}$, где l' зависит от $\rho_k(\sigma)$. Для этого достаточно доказать неравенство

$$|(\rho_k(\sigma)f, \varphi)| \leq \|f\|_l^{-k} \|\varphi\|_{-l'}^k, \quad \varphi \in \mathcal{D}(R^n). \quad (3.9)$$

Имеем неравенство

$$|(\rho_k(\sigma)f, \varphi)| = |(f, \rho_k(\sigma)\varphi)| \leq \|f\|_l^{-k} \|\rho_k(\sigma)\varphi\|_{-l}^k.$$

Из неравенств (3.7) и определения норма в H_{-l}^k следует неравенство

$$\|\rho_k(\sigma)\varphi\|_{-l}^k \leq c \|\varphi\|_{-l'}^k,$$

где l' — некоторое число не зависящее от φ .

1. Любич Ю.И. Линейный функциональный анализ. Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. — 19. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР). — М., 1988. — 316 с.
2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. — 1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986. — 462 с.
3. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973. — 342 с.
4. Павлов А.Л. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Мат. сб. — 1977. — 103, № 3. — С. 367–391.
5. Павлов А.Л. Разрешимость краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классе медленно растущих обобщенных функций // Сиб. мат. ж.— 20013. — 54, № 4. — С. 871–889.

6. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. – 1972. **24**, № 4. – С. 65–143.
7. Pavlov A.L. On regularization of a certain class of distributions // Math. Nach. – 2015. – **285**, no 14-15. – С. 1839–1859.

A. L. Pavlov

About the kernel of the operator multiplication by in the space of generalized functions.

The infinite-dimensionality of kernel of the operator of multiplication by an infinitely differentiable function having a finite number of zeros of finite multiplicity in the space of generalized functions $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$, $n > 1$ is proved. Spaces of generalized functions of arbitrarily large of the order of a singularity that do not contain nontrivial elements of the kernel of the operator of multiplication by function with zeros are introduced.

Keywords: *generalized function, operator of multiplication by a function, kernel an operator.*

Донецкий национальный ун-т
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
alex4909@gmail.com

Получено 12.05.17

УДК 517.9

©2017. Д. А. Сапронов

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ЭНЕРГИЕЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ

В статье установлены в определённом смысле точные достаточные условия на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи Коши для параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции.

Ключевые слова: вырождающиеся параболические уравнения, диффузия, конвекция.

1. Постановка задачи. В области $G_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $n > 1$, рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t + A_p u + B_\chi u \equiv u_t - \sum_{i=1}^n D_i a_i(t, x, u, \nabla_x u) + \chi \cdot \nabla_x b(t, u) = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

где каратеодориевы функции $a_i(t, x, s, \xi)$ и непрерывная функция $b(t, s)$ удовлетворяют условиям

$$a_i(t, x, s, 0) = 0 \quad \forall (t, x) \in G, \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \chi \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta) \right) (\xi_i - \eta_i) \geq d_0 |\xi - \eta|^{p+1} \quad (4)$$

$$\forall (t, x, s, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, s, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, d_0 > 0, p > 1,$$

$$|a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta)| \leq d_1 |\xi - \eta| (|\xi| + |\eta|)^{p-1} \quad (5)$$

$$\forall (t, x, s, \xi) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, \forall (t, x, s, \eta) \in G \times \mathbb{R}^{n+1}, d_1 < \infty,$$

$$b(t, 0) = 0, \quad |b(t, s_1) - b(t, s_2)| \leq d_2 (|s_1| + |s_2|)^{\lambda-1} |s_1 - s_2|, \quad \lambda > 1, d_2 < \infty, \quad (6)$$

$$d_3 |s|^{\lambda+1} \leq s b(t, s) - \int_0^s b(t, \theta) d\theta \leq d_4 |s|^{\lambda+1} \quad \forall (t, s) \in \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^1, \quad 0 < d_3 < d_4 < \infty. \quad (7)$$

Уравнения структуры (1) и близкие к ним возникают в математической физике при описании различных процессов (фильтрация жидкостей и газов, теплопроводность, движение плазмы и т. д.), в которых в направлении вектора χ присутствует

конвективный перенос. Одним из важнейших вопросов в их исследовании является установление условий существования решений. Первые результаты этом направлении были получены в [1] при исследовании уравнений ньютоновской фильтрации (см. [2]). Позднее они были распространены в [3], [4] на задачи Коши–Дирихле и Коши для одномерных уравнений ньютоновской диффузии-конвекции с непрерывными и ограниченными начально-краевыми условиями. Разрешимость смешанных задач для многомерных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации с младшими членами (абсорбцией и конвекцией) исследовалась многими авторами (к примеру, [5]–[8] и ссылки к ним).

Развитием проблемы является вопрос разрешимости задачи Коши с растущими на бесконечности начальными данными. Так, при $n = 1$, $\chi = 0$ изотропные условия существования решения (1)–(2) были установлены в [9] и обобщены впоследствии в [10], [11] соответственно на многомерные уравнения и уравнения высокого порядка. Наличие «несимметричного» конвективного члена в уравнении в зависимости от показателей нелинейности приводит к возникновению анизотропных ограничений. Так, в [12] и [13] таковые установлены для одномерного уравнения ньютоновской фильтрации-конвекции. В [14] найдены оценки снизу скорости роста ненулевого решения задачи (1)–(2) с $u_0 = 0$. В данной работе установлены в некотором смысле точные ограничения на рост L_2 -нормы начальной функции на бесконечности, обеспечивающие разрешимость задачи (1)–(2), причем при $1 < \lambda \leq \frac{2p}{p+1}$ они изотропны, а при $\frac{2p}{p+1} < \lambda < p$ – анизотропны. Метод исследования базируется на интегральных априорных оценках, аналогичных принципу Сен–Венана в теории упругости.

2. Формулировка основных результатов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Энергетическим обобщенным решением задачи Коши (1)–(2) мы назовем функцию $u(t, x)$ такую, что в произвольной ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$

$$u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) + L_{\frac{\lambda+1}{\lambda}}((0, T) \times \Omega)\}$$

удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle u'_t, w \rangle dt + \int_{(0, T) \times \Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) w_{x_i} dx dt + \int_0^T \langle \chi \cdot \nabla_x b(t, u), w \rangle dt = 0$$

при любой $w(t, x) \in L_{p+1}(0, T; \overset{\circ}{W}_{p+1}^1(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega)$, а также начальному условию (2) в смысле пространства $C([0, T]; L_2(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из определения 1 вытекает справедливость следующего интегрального тождества:

$$2^{-1} \int_{\Omega} |u(T_0, x)|^2 \phi(T_0) \psi(x) dx +$$

$$+ \int_{(0, T_0) \times \Omega} \left[-2^{-1} |u|^2 \phi'(t) \psi(x) + \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) (u \cdot \psi)_{x_i} \phi(t) - \right.$$

$$\left. - B(t, u) \chi \cdot \nabla_x \psi(x) \phi(t) \right] dx dt = 2^{-1} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 \phi(0) \psi(x) dx, \quad (8)$$

$$B(t, u) = ub(t, u) - \int_0^u b(t, s) ds,$$

для произвольных ограниченных $\Omega \in \mathbb{R}^n$, любых $0 < T_0 \leq T < \infty$, $\phi(t) \in C^1[0, T_0]$, $\psi(x) \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу леммы 5.1 из дополнения при $p > 1$, $1 < \lambda \leq p + \frac{2(p+1)}{n}$ выполнено:

$$V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega)), \quad v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega)) \right\},$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $f(s)$ назовем регулярно монотонной, если для любого $0 < \delta_1 < 1$ существуют $0 < \delta_2(\delta_1) < \delta_3(\delta_1) < 1$ такие, что

$$\delta_2 f(s) \leq f((1 - \delta_1)s) \leq \delta_3 f(s) \quad 0 < s_0 < s \leq \infty.$$

ПРИМЕР 1. Очевидно, что функция $f(s) = as^b$, $0 < a < \infty$, $0 < b < \infty$, является строго правильно монотонной при $\forall s > 0$, $0 < \delta_2 < (1 - \delta_1)^b$, $(1 - \delta_1)^b < \delta_3 < 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega(v, \tau, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : -v < x_1 < s, |x_i| < \tau\}, \quad i = 2, \dots, n, v > 0, \tau > 0, s > 0,$$

$$G_T(v, \tau, s) = (0, T) \times \Omega(v, \tau, s),$$

$$I_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{p+1} dx dt, \quad J_T(v, \tau, s) = \int_{G_T(v, \tau, s)} |u|^{\lambda+1} dx dt,$$

$$\Phi_T(v, \tau, s) = \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_t(v, \tau, s)} |u|^2 dx, \quad h_0(v, \tau, s) = \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0|^2 dx,$$

$h_0(v, \tau, s) \leq h(v, \tau, s) \equiv h_2(s)^{1-\kappa_1} h_1(\tau)^{\kappa_1} + h_3(v)^{1-\kappa_2} h_1(\tau)^{\kappa_2}$, $h(v, \tau, s)$ – минимальная непрерывная мажоранта функции $h_0(v, \tau, s)$, $h_2^{-1}(s)$, $h_3^{-1}(v)$ – функции, обратные соответственно функциям $h_2(s)$, $h_3(v)$, $0 < \kappa_i < 1$, $i \in \{1, 2\}$ – некоторые постоянные.

Далее, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\chi = (\chi_1, 0, \dots, 0)$, $\chi_1 = \text{const} > 0$.

Теорема 1. Пусть в (1) $\lambda < p$, а $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$ – регулярно монотонные функции. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Пусть дополнительно $\lambda \leq \lambda_{cr} = \frac{2p}{p+1}$, а функция $h(v, \tau, s)$ удовлетворяет следующим ограничениям на рост при $v \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$, $s \rightarrow \infty$:

$$h_i(\tau) \leq k_i \tau^{\alpha_i} \quad \forall \tau > \tau' > 0, k_i < \infty, i \in \{1, 2, 3\}, \alpha_1 = n + \frac{2(p+1)}{p-1}. \quad (9)$$

Тогда существует $T^{(1)} = T^{(1)}(k_1, k_2, k_3) > 0$ такое, что задача (1), (2) разрешима в G_T при всех $T < T_1$. Если же дополнительно выполнены условия

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_i(\tau) \tau^{-\alpha_i} = 0, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (10)$$

то $T^{(1)} = +\infty$. Кроме того, при всех $T < T^{(1)}$ для решения $u(t, x)$ имеет место оценка:

$$I_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) + \\ + T^{1-\theta} (T^{-1+\sigma} J_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \leq A_1(\delta_i) T^{1-\theta} h_1(\tau)^{1+\alpha} \quad (11)$$

$\forall \tau > \tau^{(1)}(T)$, где $A_2(\delta_i) = \text{const} > 0$,

$$\theta = \frac{n(p-1)}{2(p+1) + n(p-1)}, \quad \alpha = \frac{p+1}{n} \theta, \quad \sigma = \frac{n(\lambda-1)}{2(p+1) + n(p-1)}, \quad \beta = \frac{p+1}{n} \sigma,$$

$$\tau^{(1)}(T) = \max\{\tau_i^{(1)}(T), \tau'\}, \quad \tau_1^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta_1 \tau\}, \quad (12)$$

$$\tau_2^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} < \delta_2 (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)\}, \quad (13)$$

$$\tau_3^{(1)}(T) = \inf\{\tau : T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\alpha_1^{-1}} + T^{1-\sigma} h_1(\tau)^{\alpha_3^{-1}} < \delta_3 (h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)\}, \quad (14)$$

где $0 < \delta_i < \infty$, $i \in \{1, 2, 3\}$ – произвольные постоянные.

2. Если в (1) $\lambda_{cr} \leq \lambda < p$, то существует постоянная $k_2 < \infty$ (зависящая только от известных параметров задачи) такая, что при выполнении для $h(v, \tau, s)$ условий:

$$h_1(\tau) \leq k_1 \tau^{\alpha_1} \quad \forall \tau > \tau' > 0, 0 < k_1 < \infty, \quad (15)$$

$$h_2(s) \leq k_2 s^{\alpha_2} \quad \forall s > s' > 0, \alpha_2 = n + \frac{2p}{p-\lambda}, \quad (16)$$

$$h_3(v) \leq k_3 v^{\alpha_3} \quad \forall v > v' > 0, 0 < k_3 < \infty, \alpha_3 = \frac{n(p-1)}{(p+1)(\lambda-1)} + \frac{2}{\lambda-1}, \quad (17)$$

задача (1), (2) разрешима в G_T при всех $T < T^{(2)}$, $T^{(2)} = T^{(2)}(k_1, k_3) > 0$. Если же $h(v, \tau, s)$ дополнительно удовлетворяет ограничениям:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) \tau^{-\alpha_1} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} h_3(v) v^{-\alpha_3} = 0, \quad (18)$$

то $T^{(2)} = +\infty$. Кроме того, при всех $T < T^{(2)}$ для решения $u(t, x)$ задачи (1), (2) выполнено:

$$\begin{aligned} & T^{1-\theta} \left([(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)]^{-1+\nu} I_T(0, \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau))^{(1+\alpha)(1+\mu)^{-1}} + \right. \\ & \left. + I_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) + T^{1-\theta} (T^{-1+\sigma} J_T((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \right) \leq \\ & \leq A_2(\delta_i) T^{1-\theta} h_1(\tau)^{1+\alpha} \quad \forall \tau > \tau^{(2)}(T), \end{aligned} \quad (19)$$

где $A_2(\delta_i) = \text{const} > 0$, $0 < \delta_i < \infty$, $\theta, \alpha, \sigma, \beta$ – из (11),

$$\nu = \frac{n(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + 2(p+1)}, \quad \mu = \frac{(p+1)(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + 2(p+1)},$$

$\tau^{(2)}(T) = \max\{(h_1^{-1} \circ h_2)(s'), (h_1^{-1} \circ h_3)(v'), \tau', \tau_1^{(1)}(T), \tau_3^{(1)}(T)\}$, $\tau_1^{(1)}(T), \tau_3^{(1)}(T)$ – из (12) и (14) соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в (1) выполнено $\lambda_{cr} < \lambda < p$, то $\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2$.

3. Вспомогательные построения и утверждения. В дальнейшем мы будем использовать следующее интерполяционное неравенство Ниренберга–Гальярдо:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_a(\Omega(v, \tau, s))} & \leq d_5 (\text{meas } \Omega(v, \tau, s))^{\frac{1}{a} - \frac{1}{d}} \|v\|_{L_d(\Omega(v, \tau, s))} + \\ & + d_6 \|\nabla_x v\|_{L_b(\Omega(v, \tau, s))}^\theta \|v\|_{L_d(\Omega(v, \tau, s))}^{1-\theta}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $v(x)$ – произвольная функция из пространства $W_b^1(\Omega(v, \tau, s)) \cap L_d(\Omega(v, \tau, s))$, $a > 1$, $b > 1$, $d > 0$, $d_5 > 0$, $d_6 > 0$, а $\theta \in [0, 1]$ определяется из равенства

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{n} \right) \theta + \frac{1}{d} (1 - \theta).$$

Если дополнительно $v \in \overset{\circ}{W}_b^1(\Omega(v, \tau, s))$, то $d_5 = 0$.

Введем неотрицательную срезающую функцию $\zeta(s)$, обладающую следующими свойствами: $\zeta(s) = 1$ при $s \leq 0$, $\zeta(s) = 0$ при $s \geq 1$, $\zeta(s) = 1 - s$ при $0 < s < 1$. Обозначим

$$\begin{aligned} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}(x) & = \prod_{i=2}^n \zeta \left(\left| \frac{x_i - \tau + \Delta \tau}{\Delta \tau} \right| \right) \zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) \quad \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \\ \zeta_{v, \Delta v, s, \Delta s}^{(1)}(x_1) & = \begin{cases} \zeta \left(\frac{x_1 - s + \Delta s}{\Delta s} \right), & x_1 \geq 0, \quad \forall 0 < \Delta s \leq s, \\ \zeta \left(-\frac{x_1 - v + \Delta v}{\Delta v} \right), & x_1 \leq 0, \quad \forall 0 < \Delta v \leq v. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем также непрерывную на $\mathbb{R}^n$ функцию $\xi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующим требованиям: $\xi_j(x) = 1$ при $|x_i| \leq j$, $\xi_j(x) = 0$ при $|x_i| \geq j + 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 \leq \xi_j(x) \leq 1$ при $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и определим последовательность функций

$$u_0^{(j)}(x) = u_0(x)\xi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

приближающих $u_0(x)$ в пространстве $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим последовательность задач Коши–Дирихле вида

$$u_t^{(j)} + A_p u^{(j)} + B_\lambda u^{(j)} = 0, \quad (x, t) \in G_T(j+1), \quad T > 0, \quad (21)$$

$$u^{(j)}|_{t=0} = u_0^{(j)}(x) \in L_2(\Omega(j+1)), \quad (22)$$

$$u^{(j)}|_{\partial\Omega(j+1)} = 0 \quad \forall 0 < t < T, \quad \Omega(\tau) = \Omega(\tau, \tau, \tau), \quad G_T(\tau) = (0, T) \times \Omega(\tau). \quad (23)$$

Из [8] вытекает, что задача (21)–(23) имеет решение

$$u^{(j)}(t, x) \in V_T(\Omega(j+1)) = \{v(t, x) : v \in L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega(j+1))), \\ v_t \in L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega(j+1)))\},$$

и, как следствие, $u^{(j)} \in C([0, T]; L_2(\Omega(j+1)))$. В дальнейшем через $u^{(j)}$ будем обозначать продолжение решения задачи (21)–(23) нулем на $(0, T) \times (\mathbb{R}^n \setminus \Omega(j+1))$.

Введем следующие функции, связанные с решением $u^{(j)}(t, x)$:

$$I_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad J_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{G_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} dx dt,$$

$$\Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1} dx dt, \quad \Phi_T^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0, T)} \int_{\Omega_T(v, \tau, s)} |u^{(j)}|^2 dx,$$

$$h_0^{(j)}(v, \tau, s) \equiv \int_{\Omega(v, \tau, s)} |u_0^{(j)}|^2 dx, \quad \text{при этом } h_0^{(j)}(v, \tau, s) \leq h_0(v, \tau, s) \leq h(v, \tau, s).$$

Лемма 3.1. Пусть $u^{(j)}(t, x)$ – энергетическое решение задачи (21)–(23). Тогда имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned} & \Phi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \\ & + \int_{G_T(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s)} [T^{-1} |u^{(j)}|^2 dx dt + \Psi_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + \\ & + \Delta s^{-1} (J_T^{(j)}(0, \tau - \Delta \tau, s - \frac{1}{4} \Delta s) - J_T^{(j)}(0, \tau - \Delta \tau, s - \frac{3}{4} \Delta s)) \leq \\ & \leq c [\Delta v^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v, \tau, 0) - I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau, 0)) + \Delta \tau^{-(p+1)} (I_T^{(j)}(v, \tau, s) - I_T^{(j)}(v, \tau - \Delta \tau, s)) + \end{aligned}$$

$$+\Delta s^{-(p+1)}(I_T^{(j)}(0, \tau, s) - I_T^{(j)}(0, \tau, s - \Delta s)) + \Delta v^{-1}(J_T^{(j)}(v, \tau, 0) - J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau, 0)) + h_0^{(j)}(v, \tau, s)], \quad \forall \tau > 0, \forall v > 0, \forall s > 0. \quad (24)$$

Доказательство. Подставляя в (8) в качестве срезающей функции

$$\psi(x)\phi(t) = \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^\beta(x) \exp(-tT^{-1}), \quad \beta \geq p+1,$$

после очевидных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^\beta dx + \\ & + \int_{G_T(v,\tau,s)} [(2T)^{-1}|u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^\beta] dx dt + \\ & + \beta \int_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-1} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right) dx dt \leq \\ & \leq \beta e \sum_{i=1}^n \int_{G_T(v,\tau,s)} |\nabla_x u^{(j)}|^p |u| \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt + \\ & + \beta \int_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right) dx dt + \frac{e}{2} h_0^{(j)}(v, \tau, s). \quad (25) \end{aligned}$$

Из (25) в силу неравенства Юнга с ε следует:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^2 \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^\beta dx + \int_{G_T(v,\tau,s)} [T^{-1}|u^{(j)}|^2 + |\nabla_x u^{(j)}|^{p+1}] \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^\beta dx dt \\ & + \int_{G_T(0,\tau,s)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt \leq \\ & \leq c \left(\sum_{i=1}^n \int_{G_T(v,\tau,s)} |u^{(j)}|^{p+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-p} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right|^{p+1} dx dt + \right. \\ & \left. + \int_{G_T(v,\tau,0)} |u^{(j)}|^{\lambda+1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}^{\beta-1} \left|\frac{\partial}{\partial x_1} \zeta_{v,\Delta v,\tau,\Delta\tau,s,\Delta s}\right| dx dt + h_0^{(j)}(v, \tau, s) \right), \quad (26) \end{aligned}$$

откуда очевидно следует (24).

Лемма 3.2. Пусть для решений $u^{(j)}$ задач (21)–(23) при $p > 1$, $1 < \lambda \leq p + \frac{2(p-1)}{n}$ имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u^{(j)}\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1\Omega_f(\tau))} \leq C(\tau, T) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall 0 < \tau < \infty, \quad (27)$$

$\Omega_f(\tau) := \Omega(f_1(\tau), \tau, f_2(\tau))$, где $C(T, \tau)$ – некоторая постоянная, зависящая только от известных параметров задачи (1)–(2) и не зависящая от j , а $f_1(\tau) > 0$, $f_2(\tau) > 0$ – непрерывные монотонно возрастающие при $\tau \rightarrow +\infty$ функции. Тогда существует подпоследовательность $u^{(j_k)}$ последовательности $u^{(j)}$, сходящаяся при любых $\tau < \infty$ к решению $u(t, x)$ задачи (1), (2) в пространстве $V_T(\Omega_f(\tau))$ с нормой

$$\|v\|_{V_T(\Omega_f(\tau))} = \|v\|_{L_{p+1}(0,T;W_{p+1}^1(\Omega_f(\tau)))} + \|v_t\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega_f(\tau)))}.$$

Доказательство. Так как $u^{(j)}$ – решение задачи (21)–(23), а $A_p + B_\lambda$ при $\lambda \leq p + 2n^{-1}(p-1)$ – нелинейный ограниченный оператор

$$A_p + B_\lambda : L_{p+1}\left(0, T; W_{p+1}^1(\Omega_f(\tau))\right) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}\left(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega_f(\tau))\right),$$

то, в силу (27), выполнено

$$\|u_t^{(j)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0,T;W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega_f(\tau)))} \leq C_1(\tau) < \infty \quad \forall T < \infty, \forall \tau < \infty.$$

Благодаря ограниченности $\|u^{(j)}\|_{V_T(\Omega_f(\tau))}$ из последовательности $\{u^{(j)}\}_1^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность (назовем ее снова $\{u^{(j)}\}_1^\infty$), которая в силу компактности вложения

$$V_T(\Omega_f(\tau)) \subset L_{p+1}\left((0, T) \times \Omega_f(\tau)\right)$$

будет фундаментальной в $L_{p+1}\left((0, T) \times \Omega_f(\tau)\right)$, т. е.

$$\int_{\Omega_f(\tau)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dx dt \rightarrow 0 \text{ при } i, j \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Покажем, что $u^{(j)}$ имеет предел в $L_{p+1}\left(0, T; W_{p+1}^1(\Omega_f(\tau))\right)$. Подставляя в интегральное тождество (8) в качестве пробной функции

$$w(t, x) = (u^{(i)} - u^{(j)}) \zeta_{f_1(\tau), 1, \tau, 1, f_2(\tau), 1}^{p+1}(x),$$

после преобразований с использованием оценок (3)–(5) получаем:

$$\int_{G_T(\tau-1)} |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})|^{p+1} dx dt \leq c \left(\int_{G_T(\tau)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dx dt \right)^{\frac{p}{p+1}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\int_{G_T(\tau)} (|u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dxdt)^{\frac{1}{p+1}} + c \left(\int_{G_T(\tau)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dxdt + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_{G_T(\tau)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dxdt \right), \right. \end{aligned} \quad (29)$$

$\forall \tau : f_l(\tau) < j+1$, $G_T(\tau) := (0, T) \times \Omega_f(\tau)$. Оценим сверху второе и третье слагаемые в правой части (29). В силу (6)–(7) имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(\tau)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |u^{(i)} - u^{(j)}| dxdt \leq \\ & \leq c \left(\int_{G_T(\tau)} (|u^{(i)}| + |u^{(j)}|)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}} dxdt \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_{G_T(f_1(\tau), \tau, f_2(\tau))} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \int_{G_T(\tau)} |b(t, u^{(i)}) - b(t, u^{(j)})| |\nabla_x(u^{(i)} - u^{(j)})| dxdt \leq c \left(\int_{G_T(\tau)} (|u^{(i)}| + |u^{(j)}|)^{\frac{(\lambda-1)(p+1)}{p-1}} dxdt \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \cdot \\ & \cdot \left(\int_{G_T(\tau)} |u^{(i)} - u^{(j)}|^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_{G_T(\tau)} (|\nabla_x u^{(i)}| + |\nabla_x u^{(j)}|)^{p+1} dxdt \right)^{\frac{1}{p+1}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (29) в силу (30)–(31), (28) следует:

$$\|u^{(j)} - u^{(i)}\|_{L_{p+1}(0, T; W_{p+1}^1(\Omega_f(\tau)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Отсюда в силу ограниченности и непрерывности оператора

$$A_p + B_\lambda : L_{p+1}\left(0, T; W_{p+1}^1(\Omega_f(\tau))\right) \rightarrow L_{\frac{p+1}{p}}\left(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega_f(\tau))\right)$$

вытекает:

$$\|u_t^{(j)} - u_t^{(i)}\|_{L_{\frac{p+1}{p}}(0, T; W_{\frac{p+1}{p}}^{-1}(\Omega_f(\tau)))} \rightarrow 0, \quad i, j \rightarrow \infty, \quad \forall \tau > 0. \quad (33)$$

Из (32), (33) следует фундаментальность $\{u^{(j)}\}$ в пространстве $V_T(\Omega_f(\tau))$ при любых $0 < \tau < \infty$. Зафиксируем произвольно последовательность $\tau_i \rightarrow \infty$. По ней при помощи диагонального процесса выберем подпоследовательность $u^{(j_k)}$, фундаментальную в $V(\Omega_f(\tau_i))$ при любых $i \in \mathbb{N}$. Эта подпоследовательность сходится к $u(t, x) \in V_{T_{loc}}(\mathbb{R}^n)$ – обобщенному решению уравнения (1), причем в силу непрерывности вложения

$$V_T(\Omega_f(\tau)) \subset C(0, T; L_2(\Omega_f(\tau)))$$

функция $u(t, x)$ удовлетворяет также начальному условию (2). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Из неравенства (20) при $a = b = p + 1$, $d = 2$ вытекает:

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |v|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |v|^2 dx \right)^{(1-\theta) \frac{p+1}{2}}, \quad (34)$$

θ – из (11). Проинтегрируем теперь (34) по t , применим неравенство Гельдера и положим в полученном выражении $v = u^{(j)} \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta \tau, s, \Delta s}^{p+1}(x)$. В результате после простых преобразований приходим к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) &\leq c T^{1-\theta} (\Psi_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \\ &+ \Delta \tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)) \Phi_T^{(j)}(v, \tau, s)^{(1-\theta) \frac{p+1}{2}}, \end{aligned} \quad (35)$$

Полагая в интерполяционном неравенстве (20) $a = b = p + 1$, $d = \lambda + 1$, получаем:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{p+1} dx \leq d_5^{p+1} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\theta_1} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{\lambda+1} dx \right)^{(1-\theta_1) \frac{p+1}{\lambda+1}}, \quad (36)$$

$\theta_1 = \frac{n(p-\lambda)}{n(p-\lambda) + (p+1)(\lambda+1)}$. Из того же неравенства при $a = \lambda + 1$, $b = p + 1$, $d = 2$ следует:

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |v|^{\lambda+1} dx \leq d_5^{\lambda+1} \left(\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1}} \left(\int_{\mathbb{R}_{\pm}^n} |v|^2 dx \right)^{(1-\theta_2) \frac{\lambda+1}{2}}, \quad (37)$$

$\theta_2 = \frac{n(p+1)(\lambda-1)}{(\lambda+1)(n(p-1) + 2(p+1))}$. Оценивая правую часть (36) с помощью (37), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{p+1} dx &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\theta_1 + h \theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1}} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{\lambda+1} dx \right)^{(1-\theta_1) \frac{p+1}{\lambda+1} - h} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^2 dx \right)^{h(1-\theta_2) \frac{\lambda+1}{2}}, \quad \forall 0 < h < \frac{p+1}{\lambda+1} (1 - \theta_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Зафиксируем теперь h так, чтобы было выполнено $\theta_1 + h \theta_2 \frac{\lambda+1}{p+1} + (1-\theta_2) \frac{p+1}{\lambda+1} - h = 1$. В результате имеем:

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{p+1} dx \leq c \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla_x v|^{p+1} dx \right)^{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^{\lambda+1} dx \right)^{1-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |v|^2 dx \right)^{\mu}, \quad (39)$$

где ν, μ – из (11). Полагая в (24) $s_i = (s_i - 2^{-1}\Delta s)_+, i = 1, 2, \dots, \left\lceil \frac{2s}{\Delta s} \right\rceil + 1$ и суммируя затем полученные неравенства, после очевидных преобразований с последующей заменой в выведенном соотношении аргументов получаем:

$$\begin{aligned} J_T^{(j)}(0, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) &\leq c s (\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ &+ \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + h_0^{(j)}(v, \tau, s)) \end{aligned} \quad (40)$$

при $\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$. Проинтегрируем теперь (39) и (37) по t , применим неравенство Гельдера и положим в полученном $v = u^{(j)}$. $\cdot \zeta_{v, \Delta v, \tau, \Delta\tau, s, \Delta s}^{p+1}(x)$. В результате приходим соответственно к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(0, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) &\leq c (\Psi_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s))^\nu \times \\ &\times J_T^{(j)}(0, \tau, s)^{1-\nu} \Phi_T^{(j)}(0, \tau, s)^\mu, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, 0) &\leq c T^{1-\sigma} (\Psi_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \\ &+ \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0))^\sigma \Phi_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{\sigma_1}, \end{aligned} \quad (42)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall 0 < s < \Delta s, \sigma_1 = \frac{n(p-\lambda) + (p+1)(\lambda+1)}{n(p-1) + 2(p+1)}$, σ – из (11). Используя для оценки слагаемых в правой части неравенств (41), (35), (42) неравенства (24) и (40), после замены аргументов в полученных выражениях приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(0, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) &\leq c s^{1-\nu} (\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ &+ \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + h_0^{(j)}(v, \tau, s))^{1+\mu}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) &\leq c T^{1-\theta} (\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ &+ \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + h_0^{(j)}(v, \tau, s))^{1+\alpha}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, 0) &\leq c T^{1-\sigma} (\Delta s^{-(p+1)} I_T^{(j)}(0, \tau, s) + \Delta\tau^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, s) + \\ &+ \Delta v^{-(p+1)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-1} J_T^{(j)}(v, \tau, 0) + h_0^{(j)}(v, \tau, s))^{1+\beta} \end{aligned} \quad (45)$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s, \beta$ – из (11).

Оценим теперь функции $I_T(v, \tau, s)$ и $J_T(v, \tau, s)$. Умножим (45) на $T^{\frac{(1-\theta)(1+\beta)}{(1+\alpha)} - 1 + \sigma}$, возведем затем в степень $(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}$ и сложим полученные соотношения с неравенством (44). В результате имеем:

$$R_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) \equiv I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) +$$

$$\begin{aligned}
 & +T^{1-\theta}(T^{-1+\sigma}J_T^{(j)}(v-\Delta v, \tau-\Delta\tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \leq \\
 & \leq c_6 T^{1-\theta}(\Delta s^{-(p+1)(1+\alpha)}I_T^{(j)}(0, \tau, s)^{1+\alpha} + \Delta\tau^{-(p+1)(1+\alpha)}I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{1+\alpha} + \\
 & + \Delta v^{-(p+1)(1+\alpha)}I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-(1+\alpha)}J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{1+\alpha}) \quad (46)
 \end{aligned}$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta\tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$. Зафиксируем теперь параметры $\Delta s, \Delta\tau, \Delta v$ следующим образом:

$$\Delta s \equiv \Delta s(T, \tau, s) = \Delta\tau \equiv \Delta\tau(T, v, \tau, s) = (8c_6 T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}},$$

$$\Delta v = \Delta v(T, v, \tau, 0) = (8c_6 T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} + (8c_6 T^{1-\sigma} J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\beta)^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

Подставив эти значения параметров в правую часть (46), приходим к функциональному соотношению:

$$R_T^{(j)}(\tilde{v}(v, \tau, s), \tilde{\tau}(v, \tau, s), \tilde{s}(v, \tau, s)) \leq \frac{1}{2} R_T^{(j)}(v, \tau, s) + c_6 T^{1-\theta} h_0^{(j)}(v, \tau, s), \quad (47)$$

$$\tilde{v} = v - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} - c T^{1-\sigma - \frac{\beta(1-\theta)}{1+\alpha}} J_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\beta}{(p+1)(1+\beta)}},$$

$$\tilde{\tau} = \tau - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \quad \tilde{s} = s - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}.$$

Возводя неравенство (47) в степень $\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}$ и умножая на $T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}}$, приходим к неравенству:

$$\begin{aligned}
 M_T^{(j)}(v^*(v, \tau, s), \tau^*(v, \tau, s), s^*(v, \tau, s)) & \equiv T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} R_T^{(j)}(v^*, \tau^*, s^*)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} \leq \\
 & \leq \varepsilon M_T^{(j)}(v, \tau, s) + c_6 T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}}, \quad \varepsilon = 2^{-\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \quad (48) \\
 v^*(v, \tau, s) & = v - c M_T^{(j)}(v, \tau, s) - c T^{\frac{p-\lambda}{p-1}} M_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\beta(p+1)}{\alpha}}, \\
 \tau^*(v, \tau, s) & = \tau - c M_T^{(j)}(v, \tau, s), \quad s^*(v, \tau, s) = s - c M_T^{(j)}(v, \tau, s).
 \end{aligned}$$

Из ограниченности функции $M_T^{(j)}(v, \tau, s)$ при любых $j < \infty$ следует, что существуют $v_0^{(j)} < \infty, \tau_0^{(j)} < \infty, s_0^{(j)} < \infty, \forall j < \infty$ такие, что

$$M_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq c L T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > v_0^{(j)}, \forall \tau > \tau_0^{(j)}, \forall s > s_0^{(j)}, L > 1. \quad (49)$$

Из неравенств (48), (49) в силу леммы 5.2 из дополнения следует:

$$M_T^{(j)}((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) \leq c L T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1^{(j)}(\tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall \tau > \tilde{\tau}^{(1)}(T), \quad (50)$$

Оценим $I_T^{(j)}(v, \tau, s)$ и $J_T^{(j)}(v, \tau, s)$ иначе. Умножив (43) на $s^{-(1-\nu)} T^{\frac{(1-\theta)(1+\mu)}{1+\alpha}}$, возведя затем в степень $(1+\alpha)(1+\mu)^{-1}$ и сложив полученное соотношение с (46), приходим к неравенству:

$$E_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s) \equiv T^{1-\theta} (s^{-1+\nu} I_T^{(j)}(0, \tau - \Delta\tau, s - \Delta s))^{(1+\alpha)(1+\mu)^{-1}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + I_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, s - \Delta s) + T^{1-\theta} (T^{-1+\sigma} J_T^{(j)}(v - \Delta v, \tau - \Delta \tau, 0))^{(1+\alpha)(1+\beta)^{-1}} \leq \\
 & \leq c_1 T^{1-\theta} (\Delta s^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(0, \tau, s)^{1+\alpha} + \Delta \tau^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{1+\alpha} + \\
 & + \Delta v^{-(p+1)(1+\alpha)} I_T^{(j)}(v, \tau, 0) + \Delta v^{-(1+\alpha)} J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^{1+\alpha} + h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{1+\alpha}) \quad (51)
 \end{aligned}$$

$\forall 0 < \Delta v < v, \forall 0 < \Delta \tau < \tau, \forall 0 < \Delta s < s$. Зафиксируем теперь в (51) параметры $\Delta s, \Delta \tau, \Delta v$ следующим образом:

$$\Delta s = \Delta s(T, \tau, s) = (8c_1)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} (s^{1-\nu} I_T^{(j)}(0, \tau, s)^\mu)^{\frac{1}{(p+1)(1+\mu)}},$$

$$\Delta \tau = \Delta \tau(T, v, \tau, s) = (8c_1 T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}},$$

$$\Delta v = \Delta v(T, v, \tau) = (8c_1 T^{1-\theta} I_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\alpha)^{\frac{1}{(p+1)(1+\alpha)}} + (8c T^{1-\sigma} J_T^{(j)}(v, \tau, 0)^\beta)^{\frac{1}{1+\beta}},$$

откуда следует функциональное соотношение:

$$E_T^{(j)}(\tilde{v}(v, \tau, s), \tilde{\tau}(v, \tau, s), \tilde{s}(v, \tau, s)) \leq \frac{1}{2} E_T^{(j)}(v, \tau, s) + c_1 T^{1-\theta} h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{1+\alpha} \quad (52)$$

$\forall v > 0, \forall \tau > 0, \forall s > 0$, где

$$\tilde{v} = v - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} - c T^{1-\sigma - \frac{\beta(1-\theta)}{1+\alpha}} J_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\beta}{1+\beta}},$$

$$\tilde{\tau} = \tau - c T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}},$$

$$\tilde{s} = s - c T^{-\frac{\mu(1-\theta)}{(p+1)(1+\alpha)}} s^{\frac{1-\nu}{p+1}} I_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\mu}{(p+1)(1+\alpha)}}.$$

Возведем теперь неравенство (52) в степень $\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}$ и умножим на $T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
 N_T^{(j)}(v^*(T, v, \tau, s), \tau^*(T, v, \tau, s), s^*(T, v, \tau, s)) & \equiv T^{\frac{1-\theta}{(p+1)(1+\alpha)}} E_T^{(j)}(T, v^*, \tau^*, s^*)^{\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}} \leq \\
 & \leq \varepsilon N_T^{(j)}(v, \tau, s) + c T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_0^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > 0, \forall \tau > 0, \forall s > 0, \varepsilon = 2^{-\frac{\alpha}{(p+1)(1+\alpha)}}, \quad (53)
 \end{aligned}$$

где

$$v^*(T, v, \tau, s) = v - c N_T^{(j)}(v, \tau, s) - c T^{\frac{p-\lambda}{p-1}} N_T^{(j)}(v, \tau, s)^{\frac{\beta(p+1)}{\alpha}},$$

$$\tau^*(T, v, \tau, s) = \tau - c N_T^{(j)}(v, \tau, s),$$

$$s^*(T, v, \tau, s) = s - c s^{\frac{1-\nu}{p+1}} (T^{-\frac{1-\theta}{p+1}} N_T^{(j)}(v, \tau, s))^{\frac{\mu}{\alpha}}.$$

Поскольку $N_T^{(j)}(v, \tau, s)$ ограничена при любом $j < \infty$, то существуют $v_0^{(j)} < \infty$, $\tau_0^{(j)} < \infty$, $s_0^{(j)} < \infty \quad \forall j < \infty$ такие, что

$$N_T^{(j)}(v, \tau, s) \leq c L T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h(v, \tau, s)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall v > v_0^{(j)}, \forall \tau > \tau_0^{(j)}, \forall s > s_0^{(j)}, L > 1. \quad (54)$$

Из неравенств (53), (54) в силу леммы 2 из дополнения следует:

$$N_T^{(j)}((h_3^{-1} \circ h_1)(\tau), \tau, (h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)) \leq c T^{\frac{1-\theta}{p+1}} h_1(\tau)^{\frac{\alpha}{p+1}} \quad \forall \tau > \tilde{\tau}^{(2)}(T). \quad (55)$$

Условия и оценки (9)–(19) вытекают из соотношений (50), (55), лемм 3.1 и 3.2, а также регулярной монотонности функций $(h_2^{-1} \circ h_1)(\tau)$, $h_1(\tau)$, $(h_3^{-1} \circ h_1)(\tau)$. Теорема доказана.

5. Дополнение.

Лемма 5.1. Пусть Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда, если $p > 1$, $\lambda \leq p + \frac{2(p+1)}{n}$, то имеет место вложение

$$C([0, T]; L_2(\Omega)) \cap L_{p+1}(0, T; \overset{0}{W}_{p+1}^1(\Omega)) \subset L_{\lambda+1}((0, T) \times \Omega). \quad (56)$$

Доказательство. Для данной области Ω справедливо интерполяционное неравенство Гальярдо–Ниренберга вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}(\Omega)} \leq \tilde{d}_5 \|D_x^m u\|_{L_{p+1}(\Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{L_2(\Omega)}^{1-\tilde{\theta}}, \quad (57)$$

где $u(t, x)$ – произвольная по x функция из пространства $\overset{0}{W}_{p+1}^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $\tilde{d}_5 > 0$, $0 < \tilde{\theta} = \frac{n(\lambda-1)(p+1)}{(\lambda+1)(n(p-1)+2(p+1))} < 1$. Возведя неравенство (57) в степень $\lambda+1$, проинтегрировав полученное соотношение по t и применив неравенство Гёльдера, после очевидных преобразований придем к выражению вида

$$\|u\|_{L_{\lambda+1}((0,T) \times \Omega)} \leq \tilde{d}_5 T^{\frac{1-\sigma}{\lambda+1}} \|D_x^m u\|_{L_{p+1}((0,T) \times \Omega)}^{\tilde{\theta}} \|u\|_{C([0,T]; L_2(\Omega))}^{1-\tilde{\theta}},$$

$0 < \sigma = \tilde{\theta} \frac{\lambda+1}{p+1} < 1$, откуда следует (56). Лемма доказана.

Лемма 5.2. Пусть неотрицательная непрерывная неубывающая по своим аргументам функция $f(s)$ и строго возрастающие $g_i(s_i)$, $i = \overline{1, 3}$, $s = (s_1, s_2, s_3)$ удовлетворяют соотношению:

$$\begin{aligned} & f(s_1 - f(s), s_2 - a_1 s_2^\alpha f(s)^\beta, s_3 - f(s) - a_2 f(s)^\gamma) \leq \\ & \leq \varepsilon f(s_1, s_2, s_3) + g_1(s_1)^{\kappa_1} g_2(s_2)^{1-\kappa_1} + g_1(s_1)^{\kappa_2} g_3(s_3)^{1-\kappa_2} \end{aligned} \quad (58)$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $0 < a_1 < \infty$, $0 \leq a_2 < \infty$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 < \kappa_i < 1$, $i \in \{1, 2\}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$.

Предположим также, что выполнены следующие требования:

1) существуют $\tilde{s}_1 < +\infty$ и $L > 2(1-\varepsilon)^{-1}$ такие, что

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq L g_1(s_1) \quad \forall s_1 > \tilde{s}_1 > \hat{s}_1 > 0, \quad (59)$$

2) для $g_i(s_i)$ выполнено

$$g_1(s_1) \leq b_1 s_1 \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, \quad g_2(s_2) \leq b_2 s_2^{(1-\alpha)\beta^{-1}} \quad \forall s_2 > (g_2^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \quad (60)$$

$$\begin{aligned} g_3(s_3) & \leq b_3 \min\{s_3, s_3^{\gamma^{-1}}\} \quad \forall s_3 > (g_3^{-1} \circ g_1)(\hat{s}_1), \\ Lb_1 & < 1, \quad a_1(Lb_2)^\beta < 1, \quad Lb_3 + a_2(Lb_3)^\gamma < 1. \end{aligned} \quad (61)$$

3) функции $(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $g_1(s_1)$ удовлетворяют условию правильной монотонности: для любых $0 < \delta_i = \delta_i(\delta) < 1$, $i = \overline{1, 3}$, существует $0 < \delta < 1$ такое, что выполнено

$$\tilde{\delta}_1 g_1(s_1) \leq g_1(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_1 g_1(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, 0 < \tilde{\delta}_1 < \delta_1 \leq 1 - Lb_1, \quad (62)$$

$$(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_2 (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, 0 < \tilde{\delta}_2 < \delta_2 \leq 1 - a_1(Lb_2)^\beta, \quad (63)$$

$$(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1(1 - \delta)) \leq \delta_3 (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1), \quad \forall s_1 > \hat{s}_1, 0 < \delta_3 \leq 1 - Lb_3 - a_2(Lb_3)^\gamma. \quad (64)$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(s_1, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)) \leq Lg_1(s_1) \quad \forall s_1 > \hat{s}_1 > 0, \quad (65)$$

если выполнено $(L\varepsilon + 2)\tilde{\delta}_1^{-1} < L$.

Доказательство. Положим в (58) $s_2 = s_2(s_1) = (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1)$, $s_3 = s_3(s_1) = (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1)$, зафиксируем произвольно $s' > \hat{s}_1$ и построим последовательность $\{s_1^{(i)}\}$ следующим образом:

$$s_1^{(i)} = (1 - \delta)s_1^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \delta = \max\{1 - Lb_1, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}.$$

В силу (59) имеем: $f(s_1^{(0)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(0)})) \leq Lg_1(s_1^{(0)})$. Предположим, что для некоторого $i \in \mathbb{N}$ выполнено

$$f(s_1^{(i)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq Lg_1(s_1^{(i)}). \quad (66)$$

Из предположения (58) и соотношений (59) - (65) вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & f(s_1^{(i+1)}, (g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)}), (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i+1)})) \leq \\ & \leq f((1 - \delta)s_1^{(i)}, \delta_2(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), \delta_3(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq \\ & \leq f((1 - Lb_1)s_1^{(i)}, (1 - a_1(Lb_2)^\beta)(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)}), (1 - Lb_3 - (Lb_3)^\gamma)(g_3^{-1} \circ g_1)(s_1^{(i)})) \leq \\ & \leq f(s_1^{(i)} - f(s^{(i)}), s_2^{(i)} - a_1(s_2^{(i)})^\alpha f(s^{(i)})^\beta, s_3^{(i)} - f(s^{(i)}) - a_2 f(s^{(i)})^\gamma) \leq \\ & \leq (L\varepsilon + 2)g_1(s_1^{(i)}) \leq (L\varepsilon + 2)\tilde{\delta}_1^{-1}g_1(s_1^{(i+1)}) \leq Lg_1(s_1^{(i+1)}), \quad s^{(i)} = (s_1^{(i)}, s_2^{(i)}, s_3^{(i)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ПРИМЕР 2. Пусть выполнено

$$g_1(s_1) = b_1 s_1^{\alpha_1}, \quad g_2(s_2) = b_2 s_2^{(\alpha_2 - \alpha)\beta^{-1}}, \quad 0 \leq \alpha < \alpha_2, \quad g_3(s_3) = b_3 s_3^{\alpha_3 \gamma^{-1}},$$

тогда $g_2^{-1}(s_2) = b_2^{-1} s_2^{\beta(\alpha_2 - \alpha)^{-1}}$, $g_3^{-1}(s_3) = b_3^{-1} s_3^{\gamma(\alpha_3)^{-1}}$,

$$(g_2^{-1} \circ g_1)(s_1) = b_2^{-1} b_1^{\beta(\alpha_2 - \alpha)^{-1}} s_1^{\alpha_1 \beta(\alpha_2 - \alpha)^{-1}}, \quad (g_3^{-1} \circ g_1)(s_1) = b_3^{-1} b_1^{\gamma \alpha_2^{-1}} s_1^{\alpha_1 \gamma \alpha_3^{-1}}.$$

Следовательно, $\delta_1 = \tilde{\delta}_1 = (1 - \delta)^{\alpha_1}$, $\delta_2 = (1 - \delta)^{\alpha_1 \beta(\alpha_2 - \alpha)^{-1}}$, $\delta_3 = (1 - \delta)^{\alpha_1 \gamma \alpha_3^{-1}}$, т.е. условия леммы можно обеспечить подходящим выбором b_i и L .

1. Олейник О.А., Калашиников А.С., Чжоу Юй-минь Задача Коши и краевые задачи для уравнения типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1958. – **22**, № 5. – С. 667–704.
2. Калашиников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. – 1987. – **42**, № 2. – С. 135–176.
3. Diaz J.I., Kersner R. On a nonlinear degenerate parabolic equation in infiltration or evaporation through a porous medium // J. Differential Equations. – 1987. – **69**. – P. 368–403.
4. Gilding B.H. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1989. – **16**. – P. 165–224.
5. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires // Dynod. Paris. – 1969.
6. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. – 1988. – **279**. – P. 373–394.
7. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. – 1983. – **183**. – P. 311–341.
8. Benilan Ph., Wittbold P. On Mild and Weak Solutions of Elliptic-Parabolic Problems // Adv. in Differential Equations. – 1996. – **1**, no 6. – P. 1053–1073.
9. Kalashnikov A.S. Cauchy problem in classes of growing functions for degenerate quasilinear second-order parabolic equations // Differentsialnye Uravnenia. – 1973. – **9**. – P. 682–691.
10. Di Benedetto E., Herrero M.A. On the Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations // Trans. Amer. Soc. – 1989. – **314**. – P. 197–224. – Appl. – 1991. – **155**. – P. 378–393.
11. Шишков А.Е. Эволюция носителей решения с неограниченной энергией квазилинейного вырождающегося параболического уравнения высокого порядка // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 12. – С. 151–172.
12. Gladkov A.L. Unbounded solutions of the non-linear heat-conduction equation with strong convection at infinity // Comp. Maths. Math Phys. – 1996. – **36**. – P. 1381–1391.
13. Гладков А.Л. О задаче Коши в классах растущих функций для уравнения фильтрации с конвекцией // Матем. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 35–56.
14. Сапронов Д.А. Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для решений вырождающихся параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии-конвекции с однородными условиями Коши // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – **4**. – С. 157–165.

D. A. Saponov

Existence of solutions with unbounded energy of the Cauchy problems for a degenerated second-order parabolic equations of diffusion-convection type.

In article there is established precise (in some sense) sufficient conditions on the growth of L_2 -norm of initial datum, which provide existence of solution of Cauchy problem for second-order parabolic equations of diffusion-convection type.

Keywords: *degenerate parabolic equations, diffusion, convection.*

Донбасская Национальная Академия
Строительства и Архитектуры
nervsofhorse@mail.ru

Получено 05.06.17